الحكومة المصرية — وزارة المعارف العمومية

مراقبة التعليم الفنى

كتاب علم تقدير السطوح والأحجام

تأليف الفرد لودچ

أستاذ الرياضيات النظرية بكلية المهندسين الملوكية الهندية بكوبرزهل

ترجمه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة
مع تعديل بعض الأمثله والتمرينات بما يلائم حالة المدارس المصرية

(الطبعة الرابعة)

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٢٥

الحكومة المصرية — وزارة المعارف العمومية

مراقبة التعليم الفنى

كتاب
علم تقدير السطوح والأحجام

تأليف الفرد لودج

أستاذ الرياضيات النظارية بكلية المهندسين الملوكية الهندية بكوبرزهلى

ترجمه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة
مع تعديل بعض الأمثلة والتمرينات بما يلائم حالة المدارس المصرية

وقد ترجم هذا الكتاب بتصريح من الخواجات لونجمان جرين وشركائه بلوندره

(الطبعة الرابعة)

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٢٥

فهرست

كتاب علم تقدير السطوح والأجسام

(الأرقام المحصورة بين قوسين هى أرقام البنود)

	صحيفة
خطبة المؤلف	(ك)
المقدمة (١ – ٣)	١
الأبعاد (٣)	٣
تعاريف (٤ – ١١)	٤
السطح الاسطوانى – الاسطوانة (٤)	٤
السطح المخروطى – المخروط (٥)	٥
المخروط الناقص	٦
الكرة (٦)	٦
القطعة الكروية	٧
القطعة الكروية الناقصة – المنطقة	٧
القطاع الكروى	٧
المنشور (٧)	٨
الخابور (٨)	٩
المنشور الناقص (٩)	٩
متوازى السطوح – المكعب (١٠)	١٠
الهرم (١١)	١١
الهرم الناقص	١١
الفصل الأول – الأشكال المستوية	١٢
مساحة المستطيل (١٢)	١٢
مساحة متوازى الاضلاع (١٣)	١٢
مساحة المثلث (١٤ – ١٥)	١٢
مساحة شبه المنحرف (١٦)	١٧
مساحة كثير الأضلاع (١٧)	١٨

صحيفة

	صحيفة
تمرينات — ١ —	١٩
طول القوس الدائرى (١٨ — ٢٣)	٢٤
معادلات تربط س و هـ (١٩)	٢٥
المقادير التقريبية لطول قوس دائرى (٢٠ — ٢٣)	٢٦
تمرينات — ٢ —	٣٦
مساحة القطاع الدائرى (٢٤)	٣٩
مساحة القطعة الدائرية (٢٥ — ٣٠)	٤٠
قوانين تقريبية لمساحة قطعة دائرية (٢٦ — ٢٩)	٤١
مساحة القطعة الأكبر من نصف دائرة (٣٠)	٤٨
العمق الايدروليكى المتوسط (٣١ — ٣٢)	٤٩
قانون تقريبى لتعيين نصف القطر الايدروليكى (٣٢)	٥٠
تمرينات — ٣ —	٥١
مقاسات الأراضى	٥٦
١ — مسائح المضلعات (٣٣ — ٣٦)	٥٦
كيفية ايجاد مساحة أى شكل (٣٦)	٦١
تمرينات — ٤ —	٦٧
٢ — المسائح المحددة بخطوط منحنية (٣٧ — ٣٩)	٦٩
حساب المساحة بطريقة سمبسون (٣٨)	٦٩
حساب المساحة بطريقة الرأسيات الواقعة فى الوسط أو طريقة أشباه المنحرف (٣٩)	٧١
تمرينات — ٥ —	٧٢
المنحنيات البيانية	٧٢
تعديل طريقة سمبسون بواسطة المماسات (٤٠)	٧٢
طريقة الثلثين (٤١ — ٤٣)	٧٤
طرق الرسم البيانى (٤٤ — ٤٥)	٧٦
طريقة الرأسيات الواقعة فى الوسط (٤٦)	٨١
البلانيمتر (٤٧)	٨٣
تمرينات — ٦ —	٨٤

صحيفة

الفصل الثانى – سطوح الأجسام ٨٥
تمهيد (٤٨) ٨٥
السطح المنحنى للاسطوانة (٤٩) ٨٥
السطح المنحنى لمخروط دائرى قائم (٥٠ – ٥١) ٨٦
السطح المنحنى لمخروط دائرى ناقص (٥٢) ٨٨
السطح المنحنى للكرة (٥٣) ٨٩
سطح القطعة الكروية (٥٤ – ٥٥) ٩٠
سطح القطعة الكروية الناقصة (٥٦ – ٥٨) ٩٢
المقياس الكروى (٥٩) ٩٤
تمرينـات – ٧ – ٩٥
سطح الجسم الحلق وما يرتبط به من المسائل (٦٠ – ٦٥) ٩٧
تمرينـات – ٨ – ١٠١
الفصل الثالث – الشقق والمثلثات وكثيرات السطوح الكروية ١٠٢
تعاريف (٦٦) ١٠٢
مساحة الشقة الكروية (٦٧ – ٦٨) ١٠٣
مساحة المثلث الكروى (٦٩) ١٠٤
مساحة المثلث الكروى المتساوى الأضلاع (٧٠) ١٠٦
تمرينـات – ٩ – ١٠٨
مساحة المضلع الكروى (٧١ – ٧٢) ١٠٩
تمرينـات – ١٠ – ١١٢
مساحة المضلع الكروى المتساوى الاضلاع (٧٣) ١١٣
مساحة المضلع الشبكى المنتظم المرسوم على كرة (٧٤ – ٧٩) ١١٤
مساحة الخمسة الكثيرات السطوح المنتظمة الكروية (٧٦) ١٢٠
تمرينـات – ١١ – ١٢٧
الفصل الرابع – كثيرات الأوجه المستوية المنتظمة ١٢٩
الأجسام الخمسة المنتظمة (٨٠) ١٢٩
الخواص المتعاكسة (٨١) ١٣٠

صحيفة

سطح كثير الأوجه المنتظم (٨٢) ١٣٣
حجم كثير الأوجه المنتظم (٨٣) ١٣٤
نصف قطرى الكرتين المرسومتين داخلا وخارجا (٨٤ – ٨٧) ١٣٥
الارتباطات بين ذى الأربعة الأوجه وذى الثمانية الأوجه (٨٨) ١٣٧
تمرينات – ١٢ – ١٣٨
الفصل الخامس – أحجام الأجسام ١٤٠
القانون المنشورى أو قانون سمبسون (٨٩ – ٩٠) ١٤٠
الحالة التى فيها يكون القطاع المتوسط هو القطاع الواقع فى الوسط (٩١) ... ١٤٠
القطاعات الواقعة فى الوسط (٩٢ – ٩٦) ١٤١
المخروط الناقص القائم الدائرى (٩٢) ١٤١
الهرم الناقص (٩٥) ١٤٣
تمرينات – ١٣ – ١٤٤
القطعة الكروية الناقصة (٩٧ – ١٠٠) ١٤٤
القطعة الكروية (١٠١ – ١٠٢) ١٤٧
تمرينات – ١٤ – ١٤٩
المنشور الناقص (١٠٣) ١٥١
تمرينات – ١٥ – ١٥١
القطاعات المتوسطة والأحجام (١٠٤ – ١١٠) ١٥٣
المخروط الناقص (١٠٦) ١٥٥
القطعة الكروية الناقصة (١٠٧) ١٥٦
المجسم المكافئ (١٠٨) ١٥٧
المنشور الناقص (١٠٩) ١٥٨
قانون حجم اتخابور (١١٠) ١٥٩
تحقيق آخر لقانون القطعة الكروية الناقصة والمخروط الناقص (١١١ – ١١٤) ١٦٠
تمرينات – ١٦ – ١٦٣
التجويف الكروى (١١٥) ١٧١
الكرة المجوفة (١١٦ – ١١٧) ١٧٢

صحيفة

القطاع الكروى (١١٨) ١٧٣
تمرينات — ١٧ — ١٧٤
الاسطوانة المائلة (١١٩) ١٧٦
الجسم الحلق (١٢٠) ١٧٧
تمرينات — ١٨ — ١٧٩
نظريات ومسائل متعلقة بالجسم الحلق (١٢١ — ١٢٤) ١٨٠
تمرينات — ١٩ — ... — ١٨٢
الأجسام المتشابهة (١٢٥) ١٨٣
تمرينات — ٢٠ — ١٨٥
الفصل السادس — التقدير التقريبي للأحجام ١٨٧
بطريقة سمبسون (١٢٦ — ١٢٧) ١٨٧
القوانين الخاصة بالقطاع الواقع فى الوسط والقطاعين المتطرفين حينما تكون القطاعات
متساوية التباعد (١٢٨ — ١٣٢) ١٨٨
القوانين الخاصة بالقطاع الواقع فى الوسط والقطاعين المتطرفين حينما تكون القطاعات
غير متساوية التباعد (١٢٣ — ١٣٥) ١٩٣
المتوسط الحسابى لقطاعات مخصوصة (١٣٦) ٢٠٠
تمرينات — ٢١ — ٢٠١
طرق عمومية لايجاد القطاع العرضى المتوسط من جملة قطاعات عرضية متوازية متساوية
التباعد (١٣٧ — ١٤٧) ٢٠٦
قانون سمبسون (١٣٧) ٢٠٦
قانون ودل (١٣٨) ٢٠٧
تمرينات — ٢٢ — ٢١٢
تمرينات — ٢٣ — ٢١٨
الفصل السابع — تقدير الحفر والردم ٢٢٠
أولا — مساحة القطاعات (١٤٨ — ١٥٤) ٢٢٠
مساحة القطاع العرضى حينما تكون الأرض أفقية عرضيا (١٤٩) ٢٢١
المساحة بدلالة الارتفاع المكبر ونصف عرض القطاع (١٥٠) ٢٢٢

صحيفة

القوانين الخاصة بالحالة التى فيها الضلع المائل للأرض غير قاطع للقاعدة (١٥٢) ٢٢٤
القوانين الخاصة بالحالة التى فيها الضلع المائل للأرض قاطع للقاعدة (١٥٣) ... ٢٣٠
خلاصة القوانين الخاصة بقطاع الحفر والردم (١٥٤) ٢٣١
تمرينات — ٢٤ — ٢٣٣
ثانيا — حجم الحفر والردم (١٥٥ — ١٦٧) ٢٣٦
القطاع العرضى المتوسط وحجم الحفر والردم اذا كان ضلع الأرض غير قاطع للقاعدة (١٥٥ — ١٦٣) ٢٣٦
الطريقة الأولى لتعيين الحجم — الطريقة المنشورية (١٥٥ — ١٦١) ٢٣٦
الطريقة الثانية أو طريقة الافق المكافئ فى حالة ميل الأرض (١٦٢) ٢٤٨
الطريقة الثالثة فى حالة ميل الأرض (١٦٣) ٢٥١
خلاصة القوانين فى حالة ميل الأرض (١٦٤) ٢٥٣
ايجاد تأثير الانحناء على حجم الحفر (١٦٧) ٢٥٧
تمرينات — ٢٥ — ٢٦١
الفصل الثامن — حل المثلثات بواسطة اللوغاريتمات وقواعد مختصرة فى الحسابات اللوغاريتمية ٢٦٥
تمهيدات (١٦٨ — ١٦٩) ٢٦٥
بيان القواعد الخاصة باللوغاريتمات بالاختصار (١٧٠ — ١٧١) ٢٦٦
قسمة اللوغاريتم ذى العدد البيانى السالب (١٧١) ٢٦٩
تمرينات — ٢٦ — ٢٧٠
حل المثلث اذا علمت أضلاعه (١٧٢) ٢٧٢
حل المثلث اذا علم أحد أضلاعه والزاويتان المجاورتان له (١٧٣) ٢٧٦
حل المثلث اذا علم ضلعان من أضلاعه والزاوية المقابلة لأحدهما والحالتان الملتبسة وغير الملتبسة (١٧٤) ٢٧٨
حل المثلث اذا علم ضلعان من أضلاعه والزاوية المحصورة بينهما (١٧٥) ... ٢٨٤
المتمم اللوغاريتمى (١٧٦) ٢٨٨
تمرينات — ٢٧ — ٢٩٠
الفصل التاسع — ملحوظات حسابية ٢٩١
الطرح (١٧٧) ٢٩١

صحيفة

الضرب (١٧٨) ٢٩٣
الضرب المختصر (١٧٩) ٢٩٥
القسمة الطويلة (١٨٠ – ١٨١) ٢٩٦
الضرب فى النسبة التقريبية ط (١٨٢) ٢٩٩
القسمة على ط (١٨٣) ٣٠١
الضرب فى $ط^٢$ (١٨٤) ٣٠٢
القسمة على $ط^٢$ (١٨٥) ٣٠٢
تحويل الدرج الى التقدير الدائرى (١٨٦) ٣٠٣
تحويل التقدير الدائر الى درج (١٨٧) ٣٠٥
تمرينات – ٢٨ – ٣٠٦
الفصل العاشر – المقاييس الانكليزية والمقاييس المترية ٣٠٨
تمهيد ١٨٨ ... ... ٣٠٨
طرق تحويل المقاييس من انكليزية الى مترية وبالعكس مع تحقيق النتائج (١٨٩ – ١٩٠) ٣٠٩
توضيح الجداول (١٩١) ٣١٢
جدول المقاييس المترية للأطوال ٣١٤
» » » للسطوح ٣١٥
» » » للأحجام ٣١٦
» » » للاوزان ٣١٨
الارتباطات بين ثقل الماء وحجمه ٣١٩
تمرينات – ٢٩ – ٣٢٠
إيجاد عدد جالونات الماء فى وعاء اسطوانى وثقل ذلك الماء فيه (١٩٢) ... ٣٢٣
جدول الأثقال – (١٩٣) ٣٢٥
تمرينات – ٣٠ – ٣٢٦
مسائل مختلفة ٣٣٠

خطبـــة المؤلف

ان هـــذا الكتاب قد أعد للطلبة الراقين الذين يريدون تحصيل معلومات نظرية كافية فى موضوع تقدير السطوح والأحجام عمليا وقد فرضنا أن الطالب على علم ببعض قواعد هـــذا الفن وانه فى بعض الفصول عالم بعلم حساب المثلثات الى حل المثلثات

وقد اعتنى بقانون سمپسون ذى الأهمية العظمى فى تقـــدير حجم الأجسام اعتناء عظيما واستنتجت قوانين الأحجـام لجميع الأجسام البسيطة من هـــذا القانون وحده وبذلك اشتركت جميع القوانين فى اعتبارها كأحوال خاصة من هذا القانون الأساسى

ومع أن قانون سمپسون كثير الاستعمال فى جميع الأعمال الهندسية اقتصرت معظم كتب هذا الفن على ايراد كلمات قليلة فى هذا القانون وخلا بعضها من ذكره بالمرة

ولهذا القانون نفع عظيم فى تقدير مسائح السطوح المستوية فانه فى الحقيقة يعطى طريقة للتقدير التقريبى لأى دالة تكاملية من التى بالصورة

تكا ص فا س

اذا علم عدد كاف من مقادير ص المقـابلة لمقادير س المتزايدة بكميات متساوية بين حدى التكامل المعلومين ويشـترك مع هذا القانون فى فضـل مزاياه العملية قانون ودِل وقوانين أخرى وضعت لغرض الحصول على أضبط متوسـط لمقادير ص المستنتجة من المعاليم وقد سطرنا هذه القوانين فى آخر الفصل الخاص بالتقدير التقريبى للاحجام ويمكن أن يستغنى عنها قارئ هـذا الكتاب فى المرة الأولى لقراءته حيث ان قانون سمپسون كاف تمـاما فى معظم الأعمـال •

وهناك أمر آخر ينبغى الاعتناء به وهو أهمية امتحان القوانين المختلفة وفحصها بتطبيقها على أحوال مختلفة بسيطة فالملكة التى تكتسب تدريجا بهذه الطريقة لضبط القوانين وتصحيح الخطأ الذى فيها هى أمر ثمين جليل الفائدة فى جميع الفروع الرياضية

ويشتمل الكتاب على كثير من التمرينات الرقمية والجبرية وفى أواخر الكتاب بعض قواعد متعلقة باختصار الأعمال فى الحسابات اللوغاريتمية وغيرها والغرض من ذلك انما هو الاعانة على المقصود من الكتاب فقط والفصل التاسع الخاص بالملحوظات الحسابية يشتمل على طرق تساعد على اجراء الأعمال الحسابية بسرعة ولذا ينبغى أن يبدأ بقراءته

والغرض المهم من الأمثلة الجبرية انما هو التمرين على النظريات فاذا وجد بعض الطلاب صعوبة فيها ينبغى تركها فى القراءة الأولى والعود اليها ثانية حينما تزول معظم هذه الصعوبات

وفى الختام نستلفت الطلبة الى أنه من المهم أن يتمرنوا على أن يقيسوا بأنفسهم المقاييس الضرورية لتقدير بعض ما يحتاج الى تقديره عملا فان ذلك يحيي فى نفوسهم قواعد الفن وحقائقه ويساعد على سرعة رسوخ قوانينه فى أذهانهم ١٠

كوبرزهل　　　سبتمبر سنة ١٨٩٥　　　الفريد لودج

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين

مقدمة

١ — سنفرض فيما سيأتى أن الطالب على علم ببعض مبادئ علم تقدير السطوح والاحجام فمثلا نفرض أنه يعلم أن مساحة المستطيل هى حاصل ضرب طوله فى عرضه وأن مساحة الدائرة = ط نق٢ ، نق هو طول نصف القطر ، ط هو مقدار نسبة المحيط الى القطر ومقدارها الرقمى يساوى ٣ $\frac{1}{7}$ تقريبا أو ٣,١٤١٦ بتقريب أدق وان حجم الاسطوانة أو المنشور هو حاصل ضرب الارتفاع فى مساحة القطاع العرضى

ونبحث فى الفصل الخامس من الكتاب فى أحجام الاجسام والقوانين الخاصة بذلك يمكن أن تستنتج فى جميع الأحوال البسيطة من قانون مهم جدا معروف بالقانون المنشورى والغالب أن يكون كل جسم من الاجسام التى يشتغل بها محدودا بمستويين متوازيين والمسافة بينهما تسمى ارتفاع الجسم والقانون المنشورى يهدى الى طريقة بسيطة لتعيين القطاع العرضى لأسطوانة ارتفاعها مساوٍ لارتفاع الجسم المفروض فيكون حجمها كحجم ذلك الجسم وهذا القطاع العرضى يسمى القطاع العرضى المتوسط للجسم والحجم هو حاصل ضرب ارتفاع الجسم فى هذا القطاع المتوسط والقانون نفسه يتعلق بطرق خارجة عن مباحث هذا الكتاب ولذا نسلم بها مبدئيا الا أن انطباقها على الاجسام المختلفة سيبرهن عليه فيما بعد وفى آخر الفصل نبحث فى بعض الاجسام الدورانية أما الفصل السادس فهو خاص بالبحث فى التقدير التقريبى لاحجام الاجسام غير المنتظمة

ثم اننا سنبحث فى بعض أجسام خاصة وذلك فى الفصول المتعلقة بالأجسام الكثيرة السطوح وفى حساب الحفر والردم

أما الفصول الباقية من الكتاب فتبحث فى سطوح الأجسام المختلفة وفى أضلاع الأشكال المستوية ومسائحها وفى الفصول الأخيرة يفرض أن الطالب على إلمام نوعا بعلم حساب المثلثات لغاية حل المثلثات

وفى أواخر الكتاب فصل متعلق بطرق حسابية رقمية قد تكون ذات فائدة فى اختصار العمل فى كثير من الأحوال وهذا الفصل يمكن أن يرجع اليه فى أى وقت والفصل الذى يلى ذلك يبحث فى الطرق الحسابية الخاصة بالمسائل المتعلقة بالموازين والمقاييس الانكليزية والمترية وقد وضعت هذه الفصول فى آخر الكتاب لأن معظمها انما هو للمساعدة على المواضيع الأصلية من الكتاب

وفى جميع الفصول الأولى من الكتاب قد بينا للطالب كيفية تجربة أى قانون متشعب بتطبيقه على بعض أحوال خاصة بسيطة وفى بعض الاحيان قد أوريناً أيضا كيفية استنباط القانون بهذه الطريقة فاذا كان الطلبة دائما على استعداد لتجربة قانون ليسوا متحققين من ضبطه وذلك بتطبيقه على أحوال خاصة فانهم يكتسبون سريعا ملكة ثابتة فى عملهم لا يكون من السهل فقدها وفضلا عن ذلك فان هذه الطريقة يتكون بها بالتدريج ملكة تمنعهم من الخطأ وتقودهم الى سرعة الاستنتاج والضبط فى حل المسائل ولا يقتصر ذلك على مسائل تقدير السطوح والأحجام فقط بل يكون فى أى موضوع رياضى

٢ — ويجب أن يلاحظ الطالب على الأخص فى كل أعماله أن جميع المسائح تتحصل بضرب طولين وأن هذين الطولين يكونان على الدوام على زاوية قائمة فى الشكل فمثلا مساحة المستطيل الذى ضلعاه ا ٬ ب يساوى ا ب ولكن مساحة متوازى الأضلاع الذى ضلعاه ا ٬ ب ليست ا ب بل ا ب جا هـ

وذلك اذا كانت هـ هى الزاوية الواقعة بين الضلعين فاذا رسم الشكل فانه يرى ان ب جا هـ هو البعد العمودى بين الضلعين اللذين مقدار كل منهما ا وان المساحة هى حاصل ضرب الطولين المتعامدين ا ، ب جا هـ ومثل ذلك فى المسائل الأخرى

ثم ان حجم أى جسم محدود بمستويين متوازيين هو حاصل ضرب مساحة القطاع المتوسط الموازى للمستويين فى المسافة بينهما العمودية عليهما ويجب أن يكون القطاع المتوسط والطول اللذان حاصل ضربهما يعطى الحجم عمودين على بعضهما

٣ — الأبعاد

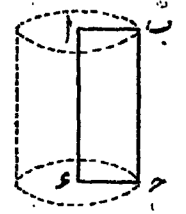
الكمية المتحصلة من ضرب طولين يقال لها ذات بعدين طوليين أو بالاختصار ذات بعدين والكمية المتحصلة بضرب ثلاثة أطوال يقال لها ذات ثلاثة أبعاد واذن فالسطح ذو بعدين والحجم ذو ثلاثة أبعاد والكميات غير المتحدة فى عدد الابعاد لا يمكن أن تجمع احداها على الأخرى ولا تطرح منها ولا أن تتساوى ببعضها أى ان جميع الكميات التى تدخل فى معادلة يجب أن تكون متحدة فى عدد أبعادها فمثلا لا يمكن أن نجمع مسطحا وطولا أو حجما بعضها الى بعض لأن الناتج بهذه الكيفية يكون عديم المعنى والالتفات الى هذا الأمر الواضح يقى من الغلط غالبا ويرشد الى تصحيح الغلط حالا لو وقع

تعاريف

٤ — السطح الأسطوانى — الاسطوانة

السطح الاسطوانى هو السطح الذى يتكوّن من خط مستقيم يتحرك موازيا لنفسه حول محيط أى منحن يسمى منحنى الدليل والخط المتحرك يسمى الراسم والجسم المحدّد بهذا السطح يسمى اسطوانة فاذا كان منحنى الدليل دائرة وكان الخط المتحرك عموديا على مستوى دائرة الدليل فالأسطوانة المتولدة تسمى أسطوانة دائرية والخط المار بمركز الدائرة موازيا للراسم يسمى محور الاسطوانة

والجزء من أسطوانة دائرية المحدّد بمستويين عموديين على المحور يسمى اسطوانة قائمة دائرية واذا ذكر لفظ الاسطوانة في هذا الكتاب فالمراد الاسطوانة الدائرية القائمة الا اذا نص على غير ذلك والبعد بين المستويين يسمى ارتفاع الاسطوانة



ويمكن أن تتولد الاسطوانة الدائرية القائمة بتحرك دائرة بالتوازى لنفسها بحيث يكون مركزها على خط مستقيم عمودى على مستويها

ويمكن أيضا ان تتكوّن بدوران مستطيل حول أحد أضلاعه واذن فيمكن تعريفها بأنها الجسم المتكوّن باحدى تلك الطرق

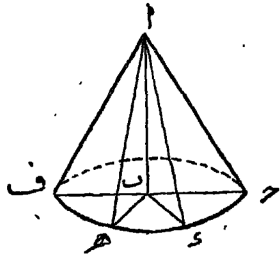
ومن الواضح أن جميع قطاعات الاسطوانة الدائرية القائمة العمودية على محورها هى دوائر متساوية

٥ — السطح المخروطى — المخروط

السطح المخروطى هو السطح الذى يتكوّن من خط مستقيم يمر بنقطة ثابتة ويتحرك حول محيط أىّ منحن يسمى منحنى الدليل والخط المتحرك يسمى الراسم والنقطة الثابتة تسمى الرأس

والجسم المحصور فى هذا المسطح يسمى مخروطا

واذا كان منحنى الدليل دائرة وكانت الرأس على محور الدائرة (أى على الخط المرسوم من مركزها عموديا على مستويها) فان المخروط يسمى مخروطا دائريا ومحور الدائرة يسمى محور المخروط الدائرى



وجزء المخروط الدائرى المحصور بين الرأس وأى مستو عمودى على المحور يسمى مخروطا دائريا قائما واذا ذكر المخروط فى هذا الكتاب فالمقصود المخروط الدائرىّ القائم الا اذا ذكر العكس والبعد بين الرأس والمستوى المكوّن للقاعدة يسمى ارتفاع المخروط

ويمكن أن يتكوّن المخروط الدائرى القائم بدوران مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعى الزاوية القائمة فمثلا المخروط المبين بالشكل يمكن أن يتولد بدوران المثلث ا ب ح حول ا ب

ومن الواضح أن جميع قطاعات المخروط القائم الدائرى العمودية على محوره هى دوائر

وطول الضلع ا ب الذى يدور حوله المثلث القائم الزاوية يساوى ارتفاع المخروط وطول أىّ وتر(ا ح ، ا ء الخ فى الشكل) يسمى راسم المخروط

والزاوية ب ا حـ الواقعة بين هذين الخطين تسمى نصف زاوية رأس المخروط والضلع الثالث للمثلث هو نصف قطر الدائرة المكونة لقاعدة المخروط

المخروط الناقص — جزء المخروط المقطوع بمستويين متوازيين فى جهة واحده من الرأس يسمى مخروطا ناقصا

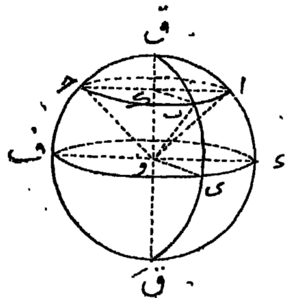
والبعد بين المستويين يسمى ارتفاع المخروط الناقص وفى هذا الكتاب يطلق اسم مخروط ناقص على المخروط الناقص الدائرى القائم المقطوع بمستويين عموديين على المحور

٦ — الكرة

الجسم المحصور فى سطح جميع نقطة على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة يسمى كرة والنقطة الثابتة تسمى مركز الكرة والبعد بين المركز والسطح يسمى نصف قطر الكرة

ومن الواضح أنه يمكن تولد الكرة بدوران نصف دائرة حول القطر

ومن الواضح أيضا أن قطاع الكرة بأى مستو هو دائرة فاذا مر المستوى بمركز الكرة فالقطاع يسمى دائرة عظيمة من الكرة والا فيسمى دائرة صغيرة



ومن البديهى أن نصف قطر أى دائرة عظيمة فى كرة يساوى نصف قطر الكرة ففى الشكل ق ا قَ ، ق ب قَ ، ى ب ف أجزاء من دائرة عظيمة ولكن ا ب حـ هى دائرة صغيرة

القطعة الكروية — ان الأجزاء التى تنقسم اليها الكرة بأى مستو تسمى قطعة كروية فاذا كان الجزآن غير متساويين فالصغرى تسمى بالقطعة الصغرى والأخرى تسمى القطعة الكبرى واذا كان الجزآن متساويين فكل واحدة تسمى نصف كرة والقطاع الناشئ عن المستوى القاطع يسمى قاعدة كل من القطعتين وأكبر سمك للقطعة فى اتجاه عمودى على قاعدتها يسمى ارتفاع القطعة وعلى ذلك تكون القطعة ى ا ب ح قطعة صغرى ٥ ى ك ارتفاعها ٥ ا ب ح قاعدتها ٥ ىَ ا ب ح هى القطعة الكبرى ٥ ىَ ك ارتفاعها ٥ ا ب ح قاعدتها

القطعة الكروية الناقصة — المنطقة

جزء الكرة المحصور بين مستويين متوازيين قاطعين لها يسمى قطعة كروية ناقصة والبعد بين المستويين يسمى ارتفاع القطة الناقصة فاذا اشتملت القطعة على مركز الكرة فتسمى قطعة عظمى والا فتسمى قطعة صغرى وأكبر قطاع لقطعة كروية ناقصة عظمى بمستو مواز لقاعدتيها هو دائرة عظيمة للكرة وأكبر قطاع لقطعة كروية ناقصة صغرى هو احدى قاعدتيها

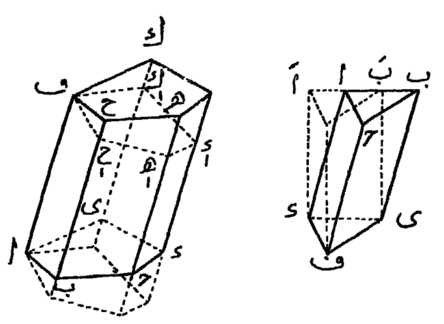
وقد تسمى القطعة الكروية الناقصة منطقة الا أن العادة أن يخصص هذا الاسم بالسطح المنحنى للقطعة الكروية الناقصة وهذا هو الذى سيتبع فى هذا الكتاب

القطاع الكروى — الجسم المحصور بين سطح الكرة وسطح المخروط الدائرى الذى رأسه مركز الكرة يسمى قطاعا كرويا ويتكوّن من مخروط قائم دائرىّ راسمه نصف قطر الكرة وقطعة كروية متحدة القاعدة مع المخروط وفى الشكل يتكوّن القطاع الكروى من المخروط و ا ب ح والقطعة ى ا ب ح والجزء الباقى من الكرة يكوّن أيضا قطاعا كرويا والقطاعان اللذان أحدهما أصغر من نصف الكرة والآخر أكبر منهُ يتميزان عن بعضهما باسمى أصغر وأكبر على التناظر

٧ — المنشور

المنشور هو جسم متولد من حركة خط مستقيم ذى طول محدود بالتوازى لنفسه بحيث تمر احدى نهايتيه بمحيط شكل مستو كثير الاضلاع معلوم و بذلك ترسم النهاية الأخرى شكلا مضلعا آخر مساويا للأول ومشابها له فى مستو مواز لمستوى المضلع الأول ويحد المنشور حينئذ بمضلعين متساويين متوازيين متصلين ببعضهما بمتوازيات أضلاع عددها كعدد أضلاع كل مضلع وطول الخط المتحرك يسمى طول المنشور

ومتى كانت هذه المتوازيات الأضلاع عمودية على مستويى المضلعين (وفى هذه الحالة تكون متوازيات الأضلاع هذه بالضرورة مستطيلات) فالمنشور يسمى منشورا قائما وفى جميع الأحوال الأخرى يسمى منشورا مائلا وفى الشكلين الآتيين الأجسام المحددة بخطوط غليظة منشورات مائلة والمبينة بخطوط منقطة منشورات قائمة



ويرى أن المنشور هو حالة خاصة من الأسطوانة حسب تعريفها العام فمنحنى الدليل هو الشكل الكثير الأضلاع والقاعدتان مستويان متوازيان

والمسافة بين المستويين تسمى ارتفاع المنشور ومتى كان المنشور قائما فهذه المسافة تساوى طوله الا أنها ليست كذلك فى الأحوال الأخرى

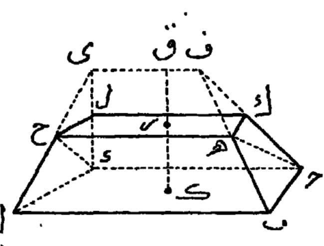
واذا كان المضلع الدليل مثلثا فالمنشور يسمى منشورا ثلاثيا واذا كان رباعيا يسمى المنشور رباعيا واذا كان مخمسا يسمى المنشور خماسيا وهكذا

٨ — الخابور

اذا أخذ منشور ثلاثى غير محدود الطول وقطع بمستويين عرضيين غير متوازيين فهذه القطعة المحصورة تسمى خابورا والأضلاع الثلاثة المتوازية تسمى أحيانا أضلاع الخابور أما السطح المستوى الشامل لاثنين منهما فيسمى قاعدة الخابور والثالث يسمى ضلع الخابور وبعد قاعدة الخابور عن ضلعه الآخر يسمى ارتفاع الخابور وفى الشكل الآتى فى البند التالى يكون الجسم الذى ضلعه ى ف وقاعدته ا ب حـ ء هو الخابور وارتفاع الخابور هو ق ك والشكل نفسه يشتمل على ثلاثة أو أربعة خوابير أخرى

٩ — المنشور الناقص

قطعة الخابور المحصورة بين قاعدة الخابور ومستو مواز لتلك القاعدة تسمى منشورا ناقصا ففى الشكل يكون الجسم المحصور بين ا ب حـ ء و ج هـ ك ل منشورا ناقصا ارتفاعه ك م أى المسافة بين المستويين المتوازيين

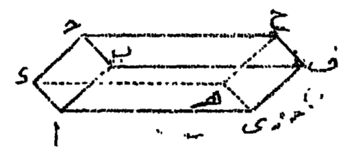


وهناك أجسام أخرى أكثر تركيبا تدخل تحت اسم المنشور الناقص الذى هو الاسم العام للأجسام التى ينطبق عليها

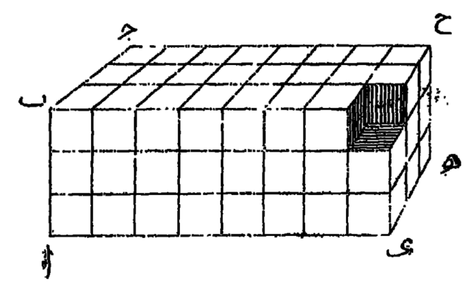
قانون المنشور والمحصورة بين مضلعين متوازيين (أنظر دائرة المعارف الانجليزية طبعة تاسعة فى موضوع تقدير السطوح والأحجام)

١٠ — متوازى السطوح — المكعب

اذا كانت أوجه المنشور متوازيات أضلاع فانه يسمى متوازى السطوح واذا كانت مستطيلات وعمودية على



أضلاع المنشور فيسمى متوازى سطوح قائما أو منشورا قائما وفى هذه الحالة تكون جميع الأوجه مستطيلات



ثم اذا كانت الأوجه متساوية وهى الحالة التى يكون فيها جميع الأوجه مربعات متساوية فيسمى مكعبا

فالمكعب الذى مقاس كل ضلع من أضلاعه سنتيمتر يسمى سنتيمترا مكعبا والذى ضلعه متر يسمى مترا مكعبا وهكذا

وهذه المكعبات تسمى وحدة المكعبات وكل الأجسام تقاس أحجامها بدلالة وحدة أو أكثر من هذه الوحدات

والشكل الأخير يبين متوازى سطوح قائما مكونا من مكعبات أحدها محذوف ومنه يتضح أن عدد المكعبات المكوّنة لجم متوازى السطوح يتحصل بضرب الأعداد المشتمل عليها كل من طوله وعرضه وارتفاعه بعضها فى بعض فاذا كان كل مكعب عبارة عن متر مكعب فالجم يكون ٨ × ٣ × ٣ = ٧٢ مترا مكعبا

١١ — الهرم

الهرم هو جسم قاعدته كثير أضلاع وأوجهه مثلثات مكوّنة برسم خطوط واصلة من زوايا القاعدة الى أى نقطة ليست فى مستويها واذن فهو حالة خاصة من المخروط كما فى تعريفه العام ثم ان المخروط هو أيضا حالة خاصة من الهرم وذلك لأننا اذا جعلنا عدد أضلاع مضلع القاعدة كبيرا كبرا كافيا بحيث يكون كل ضلع صغيرا جدا فانه يكاد ينطبق على شكل أى منحن مستو

فاذا كانت القاعدة مثلثا فالهرم يسمى ثلاثيا واذا كانت القاعدة شكلا رباعيا أو خماسيا فالهرم يسمى رباعيا أو خماسيا وهكذا

والرأس المشترك للأوجه الثلاثية يسمى رأس الهرم والبعد بين الرأس والقاعدة يسمى ارتفاع الهرم وفى حالة الهرم الثلاثى يمكن أن يطلق اسم القاعدة على أى وجه والنقطة المقابلة لها تسمى حينئذ رأسا

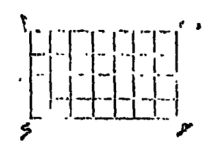
الهرم الناقص — جزء الهرم المحصور بين القاعدة ومستو مواز لها يسمى هرما ناقصا

ومن الواضح أن قاعدتى الهرم الناقص شكلان متشابهان وان كل قطاع موازٍ للقاعدتين يكون مشابها لها

الفصل الأول

الأشكال المستوية

١٢ — مساحة المستطيل

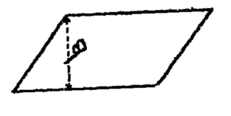


مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب طوله فى عرضه وهذه هى القاعدة الأساسية فى حساب جميع المسائح

مثال — اذا كان مستطيل طوله ٧ أمتار وعرضه ٤ أمتار فساحته = ٧ × ٤ بالأمتار المربعة واذا قدرت تقديرا جبريا فالمساحة = ٧ أمتار × ٤ أمتار = ٢٨ (مترا)^{٢} = ٢٨ مترا مربعا

١٣ — مساحة متوازى الأضلاع

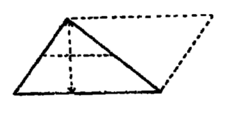
مساحة متوازى الأضلاع تساوى مساحة المستطيل المتحد معه فى القاعدة والارتفاع واذن فهى تساوى حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع



ومن هنا ينتج مباشرة أن مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جيب الزاوية الواقعة بينهما

١٤ — مساحة المثلث

مساحة المثلث تساوى نصف مساحة متوازى الأضلاع المتحد معه فى القاعدة والارتفاع واذن فهى تساوى نصف حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع

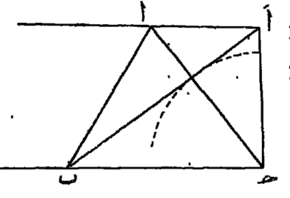


وحينئذ يمكن تقرير النتيجة كما يأتى

ان العرض المتوسط للمثلث الموازى لقاعدته هو نصف مقدار القاعدة

وهذا مطابق للحالة المخصوصة للقانون المنشورى الموضح فى بند ٩١ وذلك لأن العرض الذى فى الوسط هو نصف القاعدة أيضا وهو أيضا المتوسط الحسابى بين القاعدة وبين الصفر الذى هو العرض عند الرأس

ولأجل تعيين مساحة مثلث بمعرفة مقاس قاعدته وارتفاعه يكون من الموافق غالبا تعويضه بمثلث مكافئ له ذى قاعدة وارتفاع مناسبين لتسهيل الحساب مثلا لأجل تعيين مساحة المثلث ا ب حـ ترسم دائرة مركزها حـ ونصف قطرها ٢ سنتيمتر ويرسم خط ب اَ مماسا للدائرة ويرسم الخط ا اَ موازيا للخط ب حـ فطول الخط ب اَ بالسنتيمتر الطولى يساوى مساحة المثلث بالسنتيمتر المربع لأن مساحة المثلث اَ ب حـ مساوية لمساحة المثلث المعلوم وقاعدته اَ ب وارتفاعه نصف القطر الذى مقداره ٢ سنتيمترا

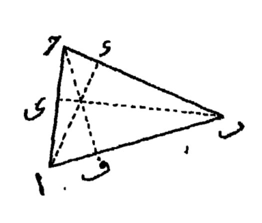


وسنبين هنا قوانين لتعيين مساحة مثلث بدلالة معاليم مختلفة ونبين ذلك أيضا فى تمرينات (١)

(١) اذا علم الضلعان ا ب ، ا حـ والزاوية ا المحصورة بينهما فالقانون الذى يعين المساحة هو $\frac{1}{2}$ ا ب . ا حـ . جا ا

لان المساحة = $\frac{1}{2}$ ا ب . حـ ف ، حـ ف = ا حـ جا ا

وهذا هو أهم قوانين حساب المثلثات الخاصة بالمساحة ويجب أن يتذكر بهذه الصورة الآتية



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين منه فى جيب الزاوية الواقعة بينهما

(٢) اذا كان المعلوم ضلعا واحدا ا ب وزوايا المثلث فالمساحة تساوى

$$\frac{1}{2}\,\overline{\text{اب}}^{2}\,\frac{\text{جا ا جا ب}}{\text{جا حـ}}$$

لأن ا حـ جا حـ = ا ب جا ب لأن كلا من هذين المقدارين يساوى العمود ا ء واذن يكون

$$\frac{1}{2}\,\text{ا ب . ا حـ . جا ا} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{اب}}^{2}\,\frac{\text{جا ا . جا ب}}{\text{جا حـ}}$$

(٣) واذا علم ضلعان ا ب ، ا حـ والزاوية المقابلة لأحدهما ولتكن الزاوية ب فالمساحة $= \frac{1}{2}$ ا ب . ا حـ حا (ب + حـ)

وفى هذا القانون يعين مقدار الزاوية حـ من المعادلة ا حـ حا حـ = ا ب حا ب

وهذه المعادلة تعطى مقدارين للزاوية حـ أى مقدار الزاوية الحادة والزاوية المكملة لها أى حـ١ ، ١٨٠° — حـ١ واذن فيكون هناك مقداران للمساحة بوجه العموم وهما

$\frac{1}{2}$ ا ب . ا حـ حا (ب + حـ١)

، $\frac{1}{2}$ ا ب . ا حـ حا (ب + ١٨٠° — حـ١)

وهذا المقدار الأخير $= \frac{1}{2}$ ا ب . ا حـ حا (حـ١ — ب)

ومع ذلك فاذا كان حـ١ أصغر من ب فهذه المساحة الثانية تصير سالبة ولا يمكن قبولها (أنظر أيضا بند ١٧٤ الخاص بالحالة المبهمة)

واذا كانت الزاوية حـ = ٩٠° فمقدارا حـ يكونان متساويين ويكون مقدار المساحة مساويا الى $\frac{1}{2}$ ا ب . ا حـ . حا ب

(٤) اذا كانت الاضلاع الثلاثة معلومه فان المساحة تساوى

$$\sqrt{س (س - ا)(س - ب)(س - حـ)}$$

وفى هذا القانون ا ، ب ، حـ هى أطوال الاضلاع و س = $\frac{1}{2}$ (ا + ب + حـ) والبرهان يتعلق بالارتباط ٢ ب حـ جتا اَ = ب^2 + حـ^2 − ا^2 (وفى هـذا المقدار اَ هو مقدار الزاوية المقابلة للضلع ا) ويمكن بيانه كما يأتى :

المساحة $= \frac{1}{2}$ ب حـ حا اَ

وهذه المساحة تساوى مساحة المثلث المتساوى الساقين اَ بَ حَ الذى ضلعاه المتساويان يساوى كل واحد منهما $\sqrt{ب حـ}$ وتنحصر بينهما الزاوية ا (أنظر الرسم الآتى)

وفى هـذا المثلث المتساوى الساقين مقدار العـمود اَ ءَ = $\sqrt{ب حـ}$ جتا $\frac{1}{2}$ اَ .

واذن يكون (اَ ءَ)^2 = ب حـ جتا^2 $\frac{1}{2}$ اَ .

$= \frac{1}{2}$ ب حـ (١ + جتا اَ)

$= \frac{1}{4}$ (٢ ب حـ + ب^2 + حـ^2 − ا^2)

$= \frac{1}{4}$ (ب + حـ + ا)(ب + حـ − ا)

= س (س − ا)

واذن يكون اَ ءَ = $\sqrt{س (س - ا)}$

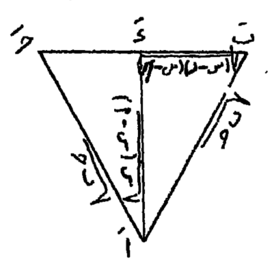
ونصف القاعدة بَ ءَ = $\sqrt{(س - ب)(س - حـ)}$ كما يمكن

اثبات ذلك بطريقة مماثلة بمعرفة أن مقداره $\sqrt{ب ح حا \frac{١}{٢} ا}$ ويتأكد من ذلك باثبات أن

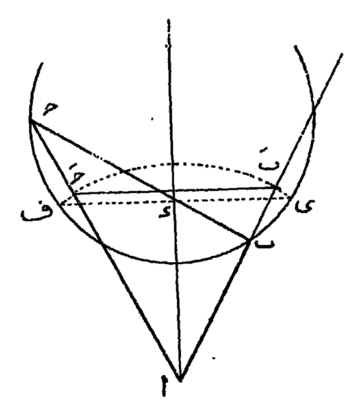
$$س (س - ا) + (س - ب) (س - ح) = ب ح$$

واذن تكون مساحة المثلث مساوية الى حاصل ضرب الارتفاع فى نصف القاعدة

$$= \sqrt{س (س - ا) (س - ب) (س - ح)}$$



والمثلث المتساوى الساقين اَ بَ حَ المساوى للمثلث المفـروض فى زاوية الرأس وفى المســاحة وهو الذى يمكن تسميته بالمثلث المتساوى الساقين المكافئ ذو فائدة عظيمة فى بعض مباحث علم تقدير السطوح والأجسام العملى (أنظر تقدير أعمــال الحفر والردم بنـد ١٥٢ فقرة ثالثة) ويستحسن انشاؤه بطريقة بسيطة ولذلك طرق عديدة مستنبطة من الهندسة الأصلية أبسطها وأخصرها عملا الطريقة الآتية على ما يظهر



١٥ — المطلوب انشاء مثلث متساوى الساقين مساو لمثلث معلوم فى المساحة وزاوية رأسه مساوية لاحدى زوايا المثلث المعلوم

ليكن ا ب ح هو المثلث المعلوم وليكن المطلوب انشاء مثلث متساوى الساقين مساو له فى المساحة وزاوية رأسه تساوى ا وليكن ا ى هو منصف الزاوية ا

فنرسم محيط دائرة مركزها على ا ء بحيث يمر بنقطتى ب ، حـ .
ثم نرسم من نقطة ء خطا عموديا على ا ء فيقطع محيط الدائرة فى ے
ونجعل نقطة ا مركزا وبنصف قطر ا ے نرسم دائرة تقطع ا ب ، ا حـ
فى بَ ، حَ على التناظر فيكون ا بَ حَ هو المثلث المتساوى الساقين
المكافئ المطلوب واثبات ذلك أن المثلث متساوى الساقين بالعمل فلم يبق سوى
اثبات أن ا بَ أى ا ے = $\sqrt{\text{ا ب} \times \text{ا حـ}}$ و بمقتضى ما هو مقرر
فى الهندسة يكون

$$\text{ا ء}^2 + \text{ب ء . ء حـ} = \text{ا ب} \times \text{ا حـ}$$

و بما هو مقرر أيضا فى الهندسة يكون

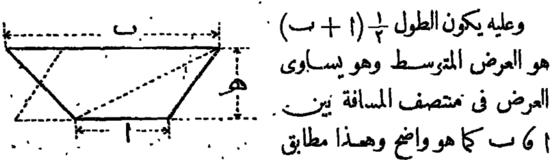
$$\text{ب ء} \times \text{ء حـ} = \text{ء ے}^2$$

واذن يكون $\text{ا ء}^2 + \text{ء ے}^2 = \text{ا ب} \times \text{ا حـ}$

وعلى ذلك يكون $\text{ا ے}^2 = \text{ا ب} \times \text{ا حـ}$ وهو المطلوب

١٦ — مساحة شبه المنحرف

الشكل الرباعى الذى له ضلعان متوازيان يسمى شبه المنحرف (و يسمى أحيانا منحرفا) واذا كان طول ضلعيه المتوازيين ا ، ب والمسافة العمودية بينهما المسماة بارتفاع شبه المنحرف تساوى هـ فان المساحة تساوى $\frac{1}{2}$ (ا + ب) × هـ كما يمكن أن يرى بسهولة بقسمته الى مثلثين



وعليه يكون الطول $\frac{1}{2}$ (ا + ب) هو العرض المتوسط وهو يساوى العرض فى منتصف المسافة بين ا ، ب كما هو واضح وهذا مطابق

لما هو واضح فى بند ٩١ الذى منه يرى أنه اذا كان القطاع المتوسط هو المتوسط الحسابى للقطاعين المتطرفين فانه يساوى القطاع الواقع فى وسط الارتفاع وهذه النظرية صادقة بالضبط فى حالة العرض المتوسط لاساحة المستوية كما هى صادقة بالنسبة للقطاع العرضى المتوسط للجسم (أنظر أيضا بند ١٤ الخاص بالعرض المتوسط للمثلث الذى يمكن اعتباره حالة مخصوصة من شبه المنحرف)

فاذا رسمنا خطا منصفا لأحد الأضلاع وموازيا للضلع الثانى فمن الواضح أنه يتحصل عندنا متوازى أضلاع مساو له فى المساحة وارتفاعه يساوى ارتفاع شبه المنحرف وعرضه يساوى العرض المتوسط واذن فيمكن بهذا الرسم اثبات القانون الخاص بالمساحة بطريقة أخرى

١٧ — مساحة كثير الأضلاع

أى شكل كثير الأضلاع يمكن قسمته الى مثلثات وأشباه منحرف وتحسب مساحته بناء على ذلك اذا قيست الابعاد المناسبة لهذا الحساب

وعلى الأخص الشكل الرباعى يمكن قسمته الى مثلثين بقطر فاذا قيس طول القطر والمسافة العمودية بين الرؤوس الأخرى والقطر فيمكن حساب مساحته لأنها تساوى حاصل ضرب القطر فى نصف مجموع العمودين فمثلا مساحة الشكل الرباعى ا ب حـ ى الموضح بالشكل تساوى $ا حـ \cdot \frac{ب م + د ى}{٢}$

ومع ذلك اذا رسم موازيان للخط ا حـ من نقطتى ب ، ى فانه يتكون مثلث حـ بَ ىَ مساحته تساوى مساحة الشكل المفروض وقاعدته $= ب م + د ى$ وارتفاعه يساوى ا خـ

أو يمكننا أن نرسم مثلثا مكافئا ذا ارتفاع مناسب وذلك بأن نرسم دائرة مركزها حـ ونصف قطرها مساو للارتفاع المطلوب (أقل من ا حـ) ونرسم مماسا للدائرة يمر بنقطة ا بحيث يقابل المتوازيين ب بَ ، ء ءَ فى نقطتى بً و ءً فيكون المثلث حـ بً ءً مساويا فى المساحة للشكل الرباعى المعلوم ومساحته تساوى بً ءً مضروبا فى نصف طول نصف القطر المنتخب فاذا كان طول نصف القطر مثلا ٢ سنتيمتر فان مقدار بً ءً بالسنتيمتر الطولى تساوى مساحة ا ب حـ ء بالسنتيمتر المربع

تمرينات (١)

المطلوب ايجاد مسائح المثلثات ا ب حـ فى الأحوال التسعة الآتية

(١) ا ب = ٣٦,٥٠ مترا ، ا حـ = ٧٢,٣٠ مترا ، زاوية ا = ٦٠°

(٢) ا ب = ٣١٥,٦ « ، ا حـ = ٤٢٢,٥ « ، « ا = ١٥َ ٧٣°

(٣) ا ب = ٩٢,٧٥ سنتيمترا ، ا = ١٩َ ٣٤° ، ب = ٤٨َ ٦٩°

(٤) ب حـ = ٩٢,٧٥ « ، ا = ١٩َ ٣٤° ، ب = ٤٨َ ٦٩°

(٥) ا ب = ٣٩٢ مترا ، ب حـ = ٥٢١ مترا ، حـ = ٤٥°

(٦) ا ب = ٥٢١ « ، ب حـ = ٣٩٢ « ، حـ = ٤٥°

(٧) الأضلاع = ٣٢ ، ٦٤ ، ٤٨ مترا على التناظر

(٨) « = ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ «

(٩) « = ٤٢٣ ، ٣٤٨ ، ٥٣٧ «

والمسائل الآتية (لغاية مسألة ٢١) مهمة فى موضوع تقدير مكعبات الحفر والردم

(١٠) اذا كان طول أحد أضلاع مثلث = ا وكان بَ ، حَ هما الزاويتان المجاورتان لهذا الضلع فالمطلوب اثبات أن مساحة المثلث = $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{٢ (ظتا بَ + ظتا حَ)}}$

(١١) المطلوب ايجاد مسائح المثلثات الآتية ورسمها بمقياس الرسم .

١ — ا = ٢٠ مترا ، ظتا بَ = ٦٫٥ ، ظتا حَ = + ١٫٥

٢ — ا = ٥٦ » ، ظتا بَ = ١٥ ، ظتا حَ = ± ١

٣ — ا = ٩٠ » ، ظتا بَ = ١١ ، ظتا حَ = ± ٥

(١٢) اذا قابل منصف الزاوية ا الضلع ب حـ فى نقطة ى ورسم الخطان ب م ، حـ د عمودين على ا ى فالمطلوب اثبات أن ا ى هو الوسط التوافقى بين ا م ، ا د

(١٣) اذا مدّ المنصف ا ى للزاوية ا الى النقطة ىَ بحيث يكون ا ىَ هو الوسط الهندسى بين ا م ، ا د فالمطلوب اثبات أن مساحة المثلث = $\text{اىَ}^{2}\ \text{ظا}^{2}\ \frac{1}{2}\text{ا}$

(١٤) المطلوب اثبات أنه فى الشكل السابق فى المسئلة الثانية عشرة اذا كانت ى هى الزاوية الحادة فى نقطة ى فأطول الخطين ا م ، ا د

$$= \text{ا ى} \times \frac{\text{طا ى}}{\text{طا ى} - \text{طا}\ \frac{1}{2}\text{ا}}$$

وأقصرهما = $\text{ا ى} \times \frac{\text{طا ى}}{\text{طا ى} + \text{طا}\ \frac{1}{2}\text{ا}}$

(١٥) اثبت أن مساحة المثلث ا ب حـ =

$$\overline{\text{ا ى}}^{2}\ \text{طا}\ \frac{1}{2}\text{ا} \left(1 + \frac{\text{ظا}^{2}\ \frac{1}{2}\text{ا}}{\text{ظا}^{2}\ \text{ى} - \text{ظا}^{2}\ \frac{1}{2}\text{ا}}\right)$$

(١٦) اذا كان طا ى = ٢ ، طا ½ ا = ١ ، ا ى = ١٠ أمتار فالمطلوب ايجاد ا م ، ا د ، ا ى ثم ايجاد مساحة المثلث ا ب حـ

(١٧) اذا كان طا ى = ٦,٥ ، طا ½ ا = ١,٥ ، ا ى = ١٠ أمتار فالمطلوب ايجاد مساحة المثلث ا ب حـ

(١٨) اذا كان ا ى = ک هو منصف الزاوية ا من مثلث فالمطلوب ايجاد الأبعاد العمودية (ب م ، حـ د) من نقطتى ب ، حـ الى الخط ا ى بدلالة ک ، طا ½ ا ، طا ى (أولا) فى حالة ما يكون ا ب = ا حـ (وثانيا) فى حالة عدم تساوى الأضلاع

ملحوظة — حينما يكون ا ى رأسيا فالبعدان ب م ، حـ د يسميان نصفى عرض المثلث حتى فى حالة ما يكونان غير متساويين ومجموعهما هو العرض

(١٩) المطلوب اثبات أن مساحة المثلث ا ب حـ = ½ ک × (مجموع نصفى العرض)

(٢٠) المطلوب اثبات أن المساحة = حاصل ضرب نصفى العرض فى ظتا ½ ا

(٢١) المطلوب ايجاد نصفى العرض والمساحة للمثلثات الآتية بواسطة قوانين المسائل ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ من هذه التمرينات ثم ايجاد المساحة أيضا بواسطة قانون المسألة الخامسة عشرة من هذه التمرينات على فرض أن ک = ٢٠ مترا فى جميع المثلثات و (١) طا ى = ٦,٥ ، طا ½ ا = ١,٥

(٢) طا ى = ١٠ ، طا ½ ا = ١

(٣) طا ى = ١٢ ، طا ½ ا = ٣

(٤) طا ى = ∞ ، طا ½ ا = ١

(٥) طا ى = ∞ ، طا ½ ا = ٢

(٢٢) اثبت أن الدائرة التى تمر بنقطتى ب ، حـ فى الشكل الموضح فى بند ١١٥ تقطع أ ء فى نقطتين احداهما هى مركز الدائرة المرسومة فى المثلث أ ب حـ والأخرى هى مركز الدائرة المرسومة على الضلع ب حـ

(٢٣) اثبت (فى الشكل نفسه) أن النسبة بين بَ حَ الى ے ف = جا ء واستنبط من هذا أنه اذا أخذ من الخط ب حـ طولان ء ےَ ، ء فَ مساويين الى ء ے فالخطان بَ ےَ ، حَ فَ يكونان موازيين الى أ ء

(٢٤) اثبت أن مركز الدائرة المذكورة يكون على محيط الدائرة المرسومة على المثلث

المطلوب اثبات النظريات الآتية بقسمة الاشكال الى مثلثات بكيفية لائقة

(٢٥) اذا رسم خط من رأس المثلث بحيث يقابل القاعدة ب حـ فى نقطة ى وأنزل عمودان ب م ، حـ د على أ ى فالمطلوب اثبات أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ أ ى (ب م + حـ د)

(٢٦) المطلوب اثبات أنه اذا قطع خط مستقيم الضلع ب حـ فى نقطة ى وخطا آخر مرسوما من نقطة أ موازيا للضلع ب حـ فى نقطة ك فمساحة المثلث تساوى $\frac{1}{2}$ ى ك (ب م + حـ د) وفى هذا القانون ب م ، حـ د هما خطان مرسومان من ب ، حـ عمودين على ى ك . ثم اذا كانت نقطة ى على امتداد الخط ب حـ عوضا عن أن تكون بين ب ، حـ فما هو التعديل اللازم ادخاله فى النظرية بالتطبيق لذلك

(٢٧) المطلوب اثبات أنه اذا تقاطع قطرا شكل رباعى على زاوية قائمة فان المساحة = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين .

(٢٨) اثبت أن مساحة أى شكل رباعى تساوى نصف حاصل ضرب قطريه فى جيب الزاوية المحصورة بينهما

(٢٩) المطلوب انشاء متوازى أضلاع مساحته ضعف مساحة شكل رباعى معلوم

(٣٠) اذا قطع خط الضلعين المتقابلين من متوازى أضلاع فى النقط ى ، ك وكانت ا ، ب ، حـ ، ء هى أطوال الأعمدة النازلة على ى ك من رؤوس متوازى الأضلاع فالمطلوب اثبات أن المساحة $= \frac{1}{2}$ ى ك (ا + ب + حـ + ء) ثم ما هو التعديل اللازم ادخاله فى النظرية اذا كانت ى أو ك أو كلاهما على امتداد الخط

(٣١) اذا قطع قاطع الضلعين المتوازيين من شبه منحرف فى نقطتى ى ، ك وكان ا ، ب ، حـ ، ء أطوال الأعمدة النازلة من الرؤوس على ى ك فالمطلوب اثبات أن مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}$ ى ك (ا + ب + حـ + ء)

(٣٢) اثبت أن مساحة أى شكل كثير الأضلاع مرسوم على دائرة = نق س ومقدار نق هو نصف قطر الدائرة ومقدار س هو نصف مجموع الأضلاع المكونة للضلع

(٣٣) اذا كان مضلع منتظم عدد أضلاعه ن وطول كل ضلع يساوى ا ونصفا قطرى الدائرتين المرسومتين داخله وخارجه على التناظر هما نق ، نق١ فالمطلوب اثبات أن ا = ٢ نق طا $\frac{ط}{ن}$ = ٢ نق١ حا $\frac{ط}{ن}$

(٣٤) المطلوب ايجاد مساحة مثلث متساوى الأضلاع (أولا) بدلالة أحد أضلاعه (ثانيا) بدلالة نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (ثالثا) بدلالة نصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

(٣٥) المطلوب ايجـاد مساحة مسدس منتظم بدلالة الكميات السالف ذكرها

(٣٦) المطلوب ايجـاد مساحة مضلع منتظم عدد أضـلاعه د بدلالة الكميات نفسها وامتحان الناتج بفرض د = ٣ ومقارنته بمـا فى مسألة ٣٤

(٣٧) قطعة ورق على شكل مثلث متساوى الأضـلاع قطعت زواياها بحيث يكون الشكل الناتج مسدّسا منتظما والمطلوب مقارنة مساحة المسدس بالمساحة الأصلية لقطعة الورق

١٨ — طول القوس الدائرى

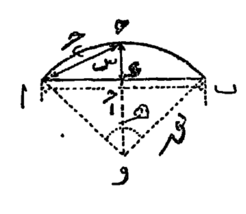
ليكن ا ب هو القوس وليكن نق نصف قطر الدائرة ، هـ هو التقدير الدائرى للزاوية المركزية المقابلة للقوس

فالتقدير الدائرى للزاوية هو هـ = $\frac{\text{القوس ا ب}}{\text{نق}}$

واذن يكون القوس = نق هـ

ومن هنا يرى أنه اذا كان المقياس الدائرى للزاوية معلوما وكذلك نصف قطر الدائرة يمكن حساب مقدار القوس

والتقدير الدائرى لزاويتين قائمتين يساوى نصف المحيط ÷ نصف القطر وهذه النسبة هى مقدار ثابت لا يمكن بيانه بغاية الضبط بأى عدد محـدود الا أن مقداره محسوبا لغاية ثمانية أرقام اعشارية يساوى ...٣,١٤١٥٩٢٦٥ والمقدار التقريبي هو ٣,١٤١٦ وهناك مقدار تقريبي أقل ضبطا وهو ٣ $\frac{١}{٧}$ الا أن هذا المقدار كاف لضبط معظم الحسابات العملية والخطأ فيه بالزيادة عن الحقيقة يساوى نحو $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$ فقط من مقداره ويرمز لهـذه النسبة عادة بالرمز ط



ويمكن ايجاد مقدار التقدير الدائرى لأى زاوية اذا علمت نسبتها الى زاويتين قائمتين

فاذا كانت الزاوية مشتملة على درج قدره ء فنسبتها الى زاويتين قائمتين = $\frac{ء}{١٨٠}$

ومن هنا يكون $\frac{هـ}{ط} = \frac{ء}{١٨٠}$

، $هـ = \frac{ط}{١٨٠} ء$

وهناك تقريب نافع لمقدار الكسر $\frac{ط}{١٨٠}$ وهو $\frac{٧}{٤٠٠}$ ناقصا $\frac{١}{٤}$ فى المائة (أنظر الفصل التاسع بند ١٨٦) وهذا يعطى الارتباط

$$هـ = \frac{٧}{٤٠٠} \left(١ - \frac{١}{٤٠٠} \right) ء$$

وطول المحيط جميعه يساوى ٢ ط ىق لأن التقدير الدائرى لأربع زوايا قائمة هو ٢ ط

١٩ — معادلات تربط ىق ، هـ

اذا علم مقدار القوس بدلالة سهمه س ووتره ح$_١$ فيلزم أن يحسب مقدار ىق ، هـ ثم يحسب بناء على ذلك حاصل ضربهما الذى هو طول القوس

والمعادلات التى تعطى ىق ، هـ بدلالة س يمكن الحصول عليها بسهولة كما يأتى فنقول من المعلوم فى الهندسة أن

$$٢ ىق س = (ا ح)^٢ = \left(\frac{١}{٢} ح_١\right)^٢ + س^٢$$

ومن هنا يكون $٢ ىق = \frac{ح^٢_١}{٤ س} + س$ .... (١)

وأيضا فان الزاوية ح ا ب = $\frac{١}{٢}$ ح و ب = $\frac{١}{٤}$ هـ

واذن يكون $طا \frac{١}{٤} هـ = \frac{٢ س}{ح_١}$ . . . . (٢)

ومن هاتين المعادلتين يمكن حساب ى ، هـ والحساب الأخير يستدعى وجود جدول الظلال ثم تعيين التقدير الدائرى للكمية هـ إما من جدول التقدير الدائرى أو من القانون المذكور فى البند السابق

وبدلا من استعمال المعادلة (١) يمكن ايجاد مقدار ى بواسطة الارتباط الآتى السهل الاثبات وهو ٢ ى = ح$_{١}$ قتا $\frac{١}{٢}$ هـ وذلك بعد ايجاد مقدار $\frac{١}{٤}$ هـ من المعادلة (٢)

واذا لم يعلم السهم ولكن علم الوتر ح$_{١}$ للقوس والوتر ح$_{٢}$ لنصف القوس المعلوم فالمعادلات التى تستعمل هى

جتا $\frac{١}{٤}$ هـ = $\frac{ح_{١}}{٢ ح_{٢}}$ ثم احدى المعادلتين الآتيتين وهما

٢ ى = ح$_{١}$ قتا $\frac{١}{٢}$ هـ أو ٢ ى = ح$_{٢}$ قتا $\frac{١}{٤}$ هـ

٢٠ — المقادير التقريبية لطول قوس دائرى

اذا علم الوتر والسهم لقوس أو علم وتر القوس ووتر نصفه فيكون الأحسن فى العمل غالبا بدلا من حساب ى ، هـ أن يستعمل قانون تقريبى فليكن ح$_{١}$ هو وتر القوس ، ح$_{٢}$ وتر نصفه ، س السهم بحيث يكون

ح$_{١}^{٢}$ + ٤ س^{٢} = ٤ ح$_{٢}^{٢}$ (بمقتضى ما هو مقرر فى الهندسة)

واذن فيستنتج تقريبا فى حالة ما يكون القوس أقل من نصف الدائرة أن

القوس = $\frac{١}{٣}$ (٨ ح$_{٢}$ — ح$_{١}$) . . . . . . (ل$_{١}$)

وهذا القانون يعطى القوس طولا أقل من الحقيقة بقليل جدا بحيث يكون الخطأ فى نصف المحيط جزءا من ثمانين جزءا ثم يتناقص بسرعة الى جزء من ألف فى ربع المحيط وبرهان هذا القانون مبين فى بند ٢١

وفى الأقواس الكبيرة يمكن تعديل هذا القانون بالطريقة الآتية وذلك بادخال وتربيع القوس الذى يمكن أن يرمز له بالرمز $ح_٣$.

وحيث أن طول القوس الذى هو أقل من نصف محيط يعين بالقانون $\frac{١}{٣}$ (٨ $ح_٢$ − $ح_١$) فينتج من ذلك أن

نصف القوس = $\frac{١}{٣}$ (٨ $ح_٣$ − $ح_٢$)

واذن يكون القوس كله = $\frac{٢}{٣}$ (٨ $ح_٣$ − $ح_٢$) . . . . . . ($ل_٢$)

والخطأ فى هـذا القانون هو ١ من ٨٠ فى الدائرة التامة وأقل من جزء من ألف فى نصف المحيط

ولكن أدق قانون هو

القوس = $\frac{ح_١ - ٤٠ ح_٢ + ٢٥٦ ح_٣}{٤٥}$ . . . . ($ل_٣$)

والخطأ هنا هو نحو جزء من ٤٠٠ جزء فى الدائرة التامة و يتناقص بسرعة عظيمة جدا وهو فى نصف الدائرة جزء من ٢٥,٠٠٠ فقط

ومن الموافق أن يرمز للأطوال المتحصلة من هذه القوانين بالرموز $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ على التناظر

فالقانونان $ل_٢$ ، $ل_٣$ يحتاجان لتعيين مقدار $ح_٣$ وكذلك لمقدارى $ح_١$ ، $ح_٢$ بحيث يجب أن نستطيع أن نحسب $ح_٣$ فى حالة عدم امكان قياسه

فالارتباط الواقع بين الثلاثة الأوتار هو

$$ح_٣^٢ = \frac{ح_٢^٣}{٢ ح_٢ + ح_١}$$

و برهان ذلك ـــ ليكن ا ب ، ا ح ، ا ى هى الأوتار الثلاثة

فالزاوية ى ا حـ هى نصف الزاوية حـ ا ب لأن القوس حـ ى المقابل لها هو نصف القوس ب حـ

والزاوية حـ ا ب $= \frac{١}{٤}$ هـ

واذن يكون ى ا حـ $= \frac{١}{٨}$ هـ

ويكون حتا $\frac{١}{٨}$ هـ $= \frac{حـ_٢}{٢ حـ_٣}$ ، حتا $\frac{١}{٤}$ هـ $= \frac{حـ_١}{٢ حـ_٢}$

وأيضا فان ١ + حتا $\frac{١}{٤}$ هـ $=$ ٢ $\text{حتا}^٢ \frac{١}{٨}$ هـ

واذن يكون ١ + $\frac{حـ_١}{٢ حـ_٢} =$ ٢ $\left(\frac{حـ_٢}{٢ حـ_٣}\right)^٢$

ومن هنا يستنتج أخيرا $\frac{حـ_٣}{١} = \frac{\text{حـ}_٢^٣}{٢ حـ_٢ + حـ_١}$

واذن فيمكن ايجاد مقدار $حـ_٣$ من هـذه المعادلة أو بالاستعانة بالجداول من المعادلة ٢ $حـ_٣ = حـ_٢$ قتا $\frac{١}{٨}$ هـ وذلك بعد تعيين $\frac{١}{٤}$ هـ من المعادلة

حتا $\frac{١}{٤}$ هـ $= \frac{حـ_١}{٢ حـ_٢}$

٢١ — اثبات القوانين $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ الخاصة بطول القوس الدائرى

[ان البرهان يرتبط بما هو معلوم من أنه اذا قدرت الزاوية ا بتقديرها الدائرى فان الارتباط الآتى بين ا ، جا ا يكون

$$\text{جا ا} = \text{ا} - \frac{\text{ا}^٣}{\underline{|٣}} + \frac{\text{ا}^٥}{\underline{|٥}} - \frac{\text{ا}^٧}{\underline{|٧}} + \cdot \cdot \quad]$$

فاذا رمز للزاوية ا و ب بالرمز هـ فان جا $\frac{١}{٢}$ هـ $= \frac{\text{ا ى}}{نق} = \frac{حـ_١}{٢ نق}$

هذه العلامة $\underline{|}$ تدل على حاصل ضرب الأعداد الصحيحة المتوالية من أول الواحد لغاية العدد الموضوع داخل العلامة فمثلا $\underline{|٥} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥$

واذن يكون $ح_{١} = ٢\,ى\,حا\,\frac{١}{٢}\,هـ$.

وبمثل ذلك يكون $ح_{٢} = ٢\,ى\,حا\,\frac{١}{٤}\,هـ$

« $ح_{٣} = ٢\,ى\,حا\,\frac{٨}{١}\,هـ$

ويكون

$$ح_{١} = ٢\,ى\left[\frac{١}{٢}\,هـ - \frac{(\frac{١}{٢}\,هـ)^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{(\frac{١}{٢}\,هـ)^{٥}}{\underline{|٥}} - \cdot\right] \quad (١)$$

$$ح_{٢} = ٢\,ى\left[\frac{١}{٤}\,هـ - \frac{(\frac{١}{٤}\,هـ)^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{(\frac{١}{٤}\,هـ)^{٥}}{\underline{|٥}} - \cdot\right] \quad (٢)$$

$$ح_{٣} = ٢\,ى\left[\frac{١}{٨}\,هـ - \frac{(\frac{١}{٨}\,هـ)^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{(\frac{١}{٨}\,هـ)^{٥}}{\underline{|٥}} - \cdot\right] \quad (٣)$$

فلأجل الحصول على مقدار $ل_{١}$ يلزم أن تؤخذ المعادلتان (١) « (٢) معا بحيث يحذف منهما $هـ^{٣}$ وذلك بأن يؤخذ المقدار $٨\,ح_{٢} - ح_{١}$

فاذا صرفنا النظر عن قوى الكمية هـ الأعلا من $هـ^{٥}$ يكون

$$٨\,ح_{٢} - ح_{١} = ٢\,ى\left[٢\,هـ - \frac{١}{٢}\,هـ + \frac{٨(\frac{١}{٤}\,هـ)^{٥}}{\underline{|٥}} - \frac{(\frac{١}{٢}\,هـ)^{٥}}{\underline{|٥}}\right]$$

$$= ٣\,ى\,هـ - ٢\,ى\,\frac{(\frac{١}{٤}\,هـ)^{٥}}{\underline{|٥}}\,(٣٢ - ٨)$$

$$= ٣\,ى\,هـ\left[١ - \frac{(\frac{١}{٤}\,هـ)^{٤}}{٣٠}\right]$$

واذن يكون $\frac{١}{٣}\,(٨\,ح_{٢} - ح_{١}) = قوس\left[١ - \frac{(\frac{١}{٤}\,هـ)^{٤}}{٣٠}\right]$

واذا ضربنا كلا من طرفى هذه المعادلة فى $١ + \frac{(\frac{١}{٤} هـ)^٤}{٣٠}$ وتذكرنا أن نحذف قوى هـ التى تزيد عن $هـ^٥$ ينتج عندنا الارتباط

$$القوس = لـ_١ \left[١ + \frac{(\frac{١}{٤} هـ)^٤}{٣٠} \right]$$

وينتج من ذلك أن المقدار $لـ_١$ يكفى لتقريب طول القوس بشرط أن يكون المقدار $\frac{١}{٣٠} (\frac{١}{٤} هـ)^٤$ صغيرا صغرا كافيا لاهماله

وبمثل ذلك يكون

$$\frac{١}{٣}(٨ حـ_٣ - حـ_٢) = نصف القوس \left[١ - \frac{(\frac{١}{٨} هـ)^٤}{٣٠} \right]$$

ويكون

$$القوس = لـ_٢ \left[١ + \frac{(\frac{١}{٨} هـ)^٤}{٣٠} \right]$$

ومن هنا ينتج أن مقدار $لـ_٢$ تقريب كاف اذا كان $\frac{١}{٣٠} (\frac{١}{٨} هـ)^٤$ صغيرا صغرا كافيا لاهماله فمثلا اذا كان $هـ = ٢٤٠^\circ$ يكون $\frac{١}{٨} هـ = ٣٠^\circ$ والتقدير الدائرى لهذه الزاوية يزيد قليلا عن $\frac{١}{٢}$ واذن يكون $\frac{١}{٣٠} (\frac{١}{٨} هـ)^٤$ يزيد قليلا عن $\frac{١}{٤٨٠}$

ولأجل ايجاد مقدار $لـ_٣$ يلزم أن نضم المضاعفات لمقادير $حـ_١$ ، $حـ_٢$ ، $حـ_٣$ التى بها تنعدم مقادير $هـ^٣$ ، $هـ^٥$ واذن فالخطأ الناشئ يكون منسوبا للكمية $هـ^٧$ ولعمل ذلك يلزم أخذ $لـ حـ_١ + م حـ_٢ + د حـ_٣$ وتنتخب مقادير لـ ، م ، د بحيث تمحى معاملات $هـ^٣$ ، $هـ^٥$ أى بحيث يكون

$$\left[\frac{لـ}{٢^٣} + \frac{م}{٤^٣} + \frac{د}{٨^٣} = ٠ \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤)$$

$$، \quad \left[\frac{لـ}{٢^٥} + \frac{م}{٤^٥} + \frac{د}{٨^٥} = ٠ \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥)$$

فمن المعادلة (٤) يكون

$$٦٤ ل + ٨ م + د = ٠$$

ومن المعادلة (٥) يكون

$$١٠٢٤ ل + ٣٢ م + د = ٠$$

ومن هنا يكون $٩٦٠ ل + ٢٤ م = ٠$

أى $٤٠ ل + م = ٠$

وهذه المعادلة تكون صحيحة اذا فرض ل = ١ ، م = − ٤٠ واذن يكون د = ٢٥٦

واذن يكون $ح_١ - ٤٠ ح_٢ + ٢٥٦ ح_٣ = ٢ س \left[\frac{١}{٢} هـ - \frac{(\frac{١}{٢} هـ)^٧}{|\underline{٧}} \right]$

$$- ٨٠ س \left[\frac{١}{٤} هـ - \frac{(\frac{١}{٤} هـ)^٧}{|\underline{٧}} \right] + ٥١٢ س \left[\frac{١}{٨} هـ - \frac{(\frac{١}{٨} هـ)^٧}{|\underline{٧}} \right]$$

وذلك باهمال قوى الكمية هـ الأعلى من $هـ^٧$

وهذا يؤول الى

$$ح_١ - ٤٠ ح_٢ + ٢٥٦ ح_٣ = ٤٥ س هـ \left[١ - \frac{٤ (\frac{١}{٨} هـ)^٦}{٣١٥} \right]$$

واذن يكون

$$\frac{ح_١ - ٤٠ ح_٢ + ٢٥٦ ح_٣}{٤٥} = قوس \left[١ - \frac{٤ (\frac{١}{٨} هـ)^٦}{٣١٥} \right]$$

أى أن $القوس = ل_٣ \left[١ + \frac{٤ (\frac{١}{٨} هـ)^٦}{٣١٥} \right]$

والكمية $\frac{4\left(\frac{1}{8}\text{هـ}\right)^{6}}{315}$ صغيرة جدا على الدوام لأنها تساوى فقط $\frac{3}{1000}$ متى كان هـ = ٢ ط أى فى المحيط كله وينتج من ذلك أنه يمكن أخذ ل_{3} مقدارا مضبوطا بالنسبة لجميع الأقواس

٢٢ — الارتباط بين ل_{1} ، ل_{2} ، ل_{3}

ان القانون ل_{3} غير موافق للاستعمال مثل قانونى ل_{1} ، ل_{2} الا أنه يمكن الحصول عليه بتجميع مقدارى ل_{1} ، ل_{2}

ولبيان ذلك نفرض ان أمكن أن $\text{ل}_{3} = \frac{\text{ن ل}_{1} + \text{ك ل}_{2}}{\text{ن} + \text{ك}}$

واذن يكون

$$(\text{ن}+\text{ك})\frac{\text{ح}_{1} - 40\,\text{ح}_{2} + 256\,\text{ح}_{3}}{45} = \text{ن}\cdot\frac{8\,\text{ح}_{2} - \text{ح}_{1}}{3} + 2\text{ك}\cdot\frac{8\,\text{ح}_{3} - \text{ح}_{2}}{3}$$

أى ان

$$\text{ح}_{1}(16\,\text{ن} + \text{ك}) - \text{ح}_{2}(160\,\text{ن} + 10\,\text{ك}) + \text{ح}_{3}(256\,\text{ن} + 16\,\text{ك}) = 0$$

وهذه المعادلة تحقق بأخذ ن = ١٦ ، ك = — ١ .

ومن هنا يكون $\text{ل}_{3} = \frac{16\,\text{ل}_{2} - \text{ل}_{1}}{15}$

أى أنه اذا أريد معرفة طول القوس بأدق ما يمكن عملا وكانت الأطوال ح_{1} ، ح_{2} ، ح_{3} قد قيست فانه يجب البدء بايجاد مقدارى ل_{1} ، ل_{2} فاذا اتحدا فى النتيجة كان المقدار الناتج هو الطول المطلوب

ولكن اذا وجد اختلاف (ولم يكن ناشئا بالضرورة من خطأ فى الحساب) فان الطول الحقيقى يكون هو $\frac{١}{١٥}$ ($١٦ ل_{٢} - ل_{١}$) أى $ل_{٢} + \frac{١}{١٥} (ل_{٢} - ل_{١})$ وهذا هو المقدار اللازم استعماله على هذه الصورة فى الحساب فاذا أريد فحص الحساب يلزم أن يحسب مقدار $ل_{٣}$ على انفراده وهذا يتفق بالضبط طبعا مع النتيجة المتقدمة

مثال = ليكن $ح_{١} = ٢٣٫٤$ ، $ح_{٢} = ٣٥٫١$ ، $ح_{٣} = ٢١٫٥$ سنتيمترات

$ل_{١} = \frac{١}{٣} (٨ ح_{٢} - ح_{١})$

٣٥٫١
× ٨
= ٢٨٠٫٨
− ٢٣٫٤
= ٢٥٧٫٤ ÷ ٣
= ٨٥٫٨
$ل_{١}$ = ٨٥٫٨

$ل_{٢} = \frac{٢}{٣} (٨ ح_{٣} - ح_{٢})$

٢١٫٥
× ٨
١٧٢٫٠
− ٣٥٫١
= ١٣٦٫٩
يطرح منه ثلثه ٤٥٫٦
$ل_{٢}$ = ٩١٫٣

$ل_{٣} = ل_{٢} + \frac{ل_{٢} - ل_{١}}{١٥}$

$ل_{٢}$ = ٩١٫٣
$ل_{١}$ = −٨٥٫٨
٥٫٥ ÷ ١٥
= ٠٫٤
$ل_{٢}$ = +٩١٫٣
٩١٫٧

التحقيق بالقانون $ل_{٣} = \frac{٢٥٦ ح_{٣} - ٤٠ ح_{٢} + ح_{١}}{٤٥}$

$٢٥٦ ح_{٣}$ = ٥٥٠٤٫٠
$ح_{١}$ = +٢٣٫٤
٥٥٢٧٫٤
$٤٠ ح_{٢}$ = −١٤٠٤٫٠
= ٤١٢٣٫٤ ÷ ٥
= ٨٢٤٫٧ ÷ ٩
= ٩١٫٦

واذن يكون طول القوس ٩١,٦ سنتيمتر تقريبا

أما اذا لم يكن $ح_٣$ قد قيس وكان القوس كبيرا فينحصر الأمر فى تقرير ما اذا كان الأحسن حساب مقـداره ثم استعمال القانون السابق أو أن يبحث عن مقدار ى ، هـ ثم يعين القوس بناء على ذلك فاذا لم توجد جداول فمن الضرورى حساب مقـدار $ح_٣$ ولكن اذا وجد جدول من جداول المربعات والمكعبات فان حساب $ح_٣$ يكون سهلا جدا ولكن اذا وجد جدول من جداول الخطوط المساحيـة ولم يكن لدينا جدول المربعات والمكعبات فربمـا يكون الأفضل حساب ى ، هـ ويعين القوس بناء على ذلك وقد بينا مثلا من أمثلة هـذه الطريقة فيما يلى الا أنه من اللازم قياس $ح_٣$ متى أمكن

كيفية ايجاد ى ، هـ وطول القوس فى المثال السابق من القانونين

$$جتا \frac{١}{٤} هـ = \frac{ح_١}{٢ ح_٣} ، ٤ ى = ٢ ح_٢ قتا \frac{١}{٤} هـ$$

$$حا \frac{١}{٤} هـ = \frac{١١٧}{٣٥١} = \frac{١}{٣}$$

واذن يكون

$\frac{١}{٤}$ هـ = ٣٢َ ٧٠° والتقدير الدائرى لهذه الزاوية هو ١,٢٣١

ويكون قتا $\frac{١}{٤}$ هـ = ١,٠٦٠٦٣

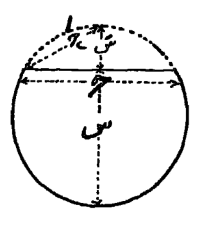
وبضرب هذا المقدار فى ٢ $ح_٢$ يكون

٤ ى = ٧٤,٤٥٦

وأخيرا ٤ ى × $\frac{١}{٤}$ هـ = ٩١,٦٦

واذن يكون القوس = ٩١,٦٦ سنتيمترا

٢٣ — وهناك طريقة أخرى لتعيين قوس قطعة دائرية أكبر من نصف محيط الدائرة اذا علم كل من الوتر حـ والسهم سـ للقطعة وهى أن يعين طول قوس القطعة الصغرى التى تكمل الدائرة ومحيطها والفرق بين هذين الطولين يكون هو طول القوس المطلوب وهاك الطريقة المشار اليها وهى تعطى نتائج مضبوطة فى جميع الأحوال التى فيها مقدار السهم سـ أكبر من الوتر حـ



فاذا رمزنا بالرمز سـَ لسهم القطعة الصغرى

يكون $\text{سـ سـَ} = \frac{1}{4}\text{حـ}^2$

واذن يكون $\text{سـَ} = \frac{\frac{1}{4}\text{حـ}^2}{\text{سـ}}$

ومحيط الدائرة $= \text{ط}\,(\text{سـ} + \text{سـَ})$

ولنفرض أن حـَ_2 هو وتر نصف القوس الأصغر

فيكون $\text{حـَ}_2^2 = \text{سـَ}\,(\text{سـ} + \text{سـَ}) = \frac{1}{4}\text{حـ}^2 + \text{سـَ}^2$

ومن احدى هاتين المتساويتين يمكن حساب مقدار حـَ_2 والمتساوية الأخيرة هى الأحسن استعمالا اذا وجد جدول للمربعات وللجذور التربيعية

فطول القوس الأصغر $= \frac{1}{3}(8\,\text{حـَ}_2 - \text{حـ})$

واذن فطول القوس المطلوب $= \text{ط}\,(\text{سـ}+\text{سـَ}) - \frac{1}{3}(8\,\text{حـَ}_2 - \text{حـ})$

مثال — ليكن $\text{حـ} = 23{,}4$ ، $\text{سـ} = 33{,}1$

فيكون $\text{سـَ} = \frac{\frac{1}{4}\text{حـ}^2}{\text{سـ}} = \frac{136{,}9}{33{,}1} = 4{,}10$

وعلى ذلك $2\,\text{نق} = 37{,}2$

، $2\,\text{ط نق} = 116{,}9$

وأيضا $ح_{٢}^{٢} = \frac{١}{٤} ح^{٢} + س^{٢} = ١٥٣,٧$

واذن يكون $ح_{٢} = ١٢,٤$

والقوس الأصغر $= \frac{١}{٣}(٨ ح_{٢} - ح) = ٢٥,٣$

ويكون القوس المطلوب $= ١١٦,٩ - ٢٥,٣ = ٩١,٦$

تمرينات (٢)

(١) قطعة دائرية وترها ٦٠ مترا وسهمها ١٠ أمتار فما طول قوسها

(٢) وتر قوس دائرى يساوى ٢٠٠ متر ووتر نصفه يساوى ١٢٠ مترا فما طول القوس

(٣) ابحث عن أنصاف قطرى الدائرتين فى المثالين السابقين

(٤) المطلوب امتحان القانون $\frac{١}{٣}(٨ ح_{٢} - ح_{١})$ لتعيين قوس دائرى بتطبيقه على قوس صغير من دائرة كبيرة كبرا غير محدود أى على خط مستقيم

(٥) المطلوب امتحان القانون $\frac{١}{٤٥}(٢٥٦ ح_{٣} - ٤٠ ح_{٢} + ح_{١})$ بتطبيقه على خط مستقيم

(٦) المطلوب امتحان القانون $ح_{٣}^{٢} = ح_{٢}^{٣} \div (٢ ح_{٢} + ح_{١})$ بتطبيقه (١) على خط مستقيم (٢) على دائرة تامة

(٧) المطلوب ايجاد وتر ربع القوس حينما يكون وتر جميع القوس ٢٠ سنتيمترا ووتر نصفه ١٢ سنتيمترا

(٨) المطلوب ايجاد وتر ربع قوس حينما يكون وتر القوس كله ١٣ سنتيمترا ووتر نصفه ٢١ سنتيمترا وبيان أنه فى هذه الحالة يكون $ح_{١}$ و $ح_{٣}$ قريبين جدا من ضلعى مخمس منتظم و $ح_{٢}$ قطره

(٩) المطلوب ايجاد وتر القوس التام حينما يكون وتر نصفه ٢١ سنتيمترا ووتر ربعه ١٣ سنتيمترا

(١٠) المطلوب ايجاد سهم القوس ونصف قطر دائرته فى مسألة (٨)

(١١) المطلوب اثبات أن السهم $\text{س}_{٢}$ لنصف القوس يحقق المعادلة

$$\text{س}_{٢} : \text{س}_{١} :: \text{ح}_{٣}^{٢} : \text{ح}_{٢}^{٢}$$

(١٢) المطلوب اثبات أن سهم نصف القوس =

$$\frac{١}{٢}\,\text{ح}_{٢}\sqrt{\frac{٢\text{ح}_{٢}-\text{ح}_{١}}{٢\text{ح}_{٢}+\text{ح}_{١}}} = \frac{\text{ح}_{٢}\,\text{س}_{١}}{٢\text{ح}_{٢}+\text{ح}_{١}}$$

(١٣) المطلوب ايجاد الخطأ النسبي بالتقريب فى القانون $\text{ل}_{١}$ أى $\frac{١}{٣}(٨\,\text{ح}_{٢} - \text{ح}_{١})$ حينما يكون $\text{هـ} = ٩٠^{\circ}$ (بفرض ان $\text{ط}^{٢} = ١٠$)

(١٤) المطلوب ايجاد مقدار الخطأ النسبي بالتقريب فى القانون $\text{ل}_{٢}$ حينما يكون $\text{هـ} = ٩٠^{\circ}$

(١٥) المطلوب اثبات أن الخطأ فى مقدار $\text{ل}_{١}$ هو أكبر من الخطأ فى مقدار $\text{ل}_{٢}$ بقدر ١٦ مرة وذلك بفرض أن $\text{ل}_{٣}$ مضبوط

(١٦) المطلوب اثبات أن المعادلات الثلاثة $\text{ل}_{١} = \text{ل}_{٢} = \text{ل}_{٣}$ متفقة مع بعضها وانها جميعها تؤدى الى ارتباط تقريبي وهو $١٦\,\text{ح}_{٣} = ١٠\,\text{ح}_{٢} - \text{ح}_{١}$

(١٧) المطلوب امتحان الارتباط التقريبي $١٦\,\text{ح}_{٣} = ١٠\,\text{ح}_{٢} - \text{ح}_{١}$ بتطبيقه على الخط المستقيم

(١٨) المطلوب تطبيق هذا الارتباط التقريبي على حل مسألتى (٧) و (٨) وشرح عدم ضبط ثانيتهما

(١٩) المطلوب اثبات أن القانونين $ل_٢$ ، $ل_٣$ ليسا أضبط من القانون $ل_١$ اذا كان $ح_٣$ محسوبا من القانون التقريبي $١٦ ح_٣ = ١٠ ح_٢ - ح_١$

(٢٠) اذا كان $ح_١ = ١٢$ مترا ، $ح_٢ = ٤٨$ مترا فالمطلوب حساب $ح_٣$ من القانون المضبوط وهو $ح_٣^٢ = ح_٢^٢ \div (٢ ح_٢ + ح_١)$ ثم ايجاد طول القوس باستعمال القوانين الثلاثة $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$

(٢١) المطلوب ايجاد الزاوية المركزية من الدائرة التي قوسها هو المذكور في المسألة السابقة وايجاد نصف قطر الدائرة مع حساب طول القوس من القانون القوس = نق هـ

(٢٢) المطلوب ايجاد طول القوس الذي في المسألة ٢٠ بالطريقة المشروحة في بند ٢٣ أي من القانون

$$\text{القوس} = ط (س + سَ) - \frac{١}{٣} (٨ حَ_٢ - ح_١)$$

(٢٣) المطلوب بيان أن $\quad ح_٢^٢ + حَ_٢^٢ = ٤ نق^٢$

(٢٤) المطلوب بيان أن $\quad \frac{١}{ح_٢^٢} + \frac{١}{حَ_٢^٢} = \frac{٤}{ح_١^٢}$

(٢٥) المطلوب بيان أن $\quad ح_٢ حَ_٢ = ح_١ نق$

(٢٦) المطلوب بيان أن نهاية مقدار النسبة $هـ_٢ : هـ_١$ حينما يكون القوس صغيرا هي $\frac{١}{٤}$

(٢٧) اذا كان وتر القوس يساوي وتر نصف القوس (= ح) فالمطلوب بيان أن القوس يساوي ٢٫٤٢ ح تقريبا

(٢٨) اذا كان كل من الوتر والسهم متساويين (= ح) فالمطلوب بيان ان نصف القطر يساوي $\frac{٥}{٨}$ ح وان القوس يساوي بالتقريب ٢٫٧٧ ح

(٢٩) اذا حدد قوس مخصوص زاوية مركزية مقـــدارها ½ ٢٥٧° فالمطلوب بيان طول القوس حينما يكون نصف القطر مساويا مترا واحدا

(٣٠) اذا كان سهم قطعة ٨ أمتار وسهم القطعة التى تتم الدائرة ٣ أمتار فالمطلوب ايجاد طول قوس كل من القطعتين

(٣١) وتر قوس يساوى ٤٠ مترا وسهمه ٨ أمتار والمطلوب ايجاد نصف قطر الدائرة ومقدار الزاوية المركزية المحصورة بهذا القوس

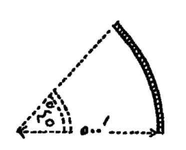
(٣٢) المطلوب ايجاد طول القوس فى المسألة السابقة باستعمال القانون ل١ ومقارنة الناتج بحاصل الضرب نق هـ

(٣٣) المطلوب ايجاد الزاوية المركزية اذا كان سهم القوس يساوى سدس نصف قطر الدائرة

(٣٤) سهم قطعة من دائرة نصف قطرها ١٥ مترا يسـاوى ٣ أمتـار والمطلوب ايجاد المحيط الكلى للقطعة (أى القوس والوتر)

(٣٥) حوض على شكل جزء اسطوانى طوله ٩٠ سنتيمترا وقطره ٥٠ سنتيمترا ومحوره أفقى ملئ بالمـاء الى ارتفـاع قدره ٢٠ سنتيمترا والمطلوب حساب مساحة الجزء المغمور بالمـاء من السطح المنحنى للاسطوانة

(٣٦) منحنى سـكة حـــديد نصـف قطره ٥٠٠ متر وزاويته ٤٥° فـما طول ذلك المنحنى



٢٤ ــ مساحة القطاع الدائرى

يمكن اعتبار القطاع الدائرى مكوّنا من مثلثات متساوية الساقين ضيقة وقواعدها تكون قوس القطاع وارتفاعاتها كلها مساوية لنصف القطر (أنظر الشكل الأيسر من بند ٢٥)

واذن فالمساحة تساوى = $\frac{1}{2}$ القوس × نصف القطر

والقوس المكون لقاعدة القطاع = نق هـ وفى هذا القانون هـ هو التقدير الدائرى لزاوية القطاع

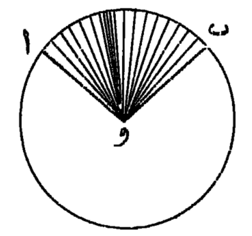
واذن تكون مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق^{2} هـ

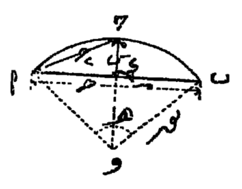
وفى حالة مخصوصة تكون مساحة جميع الدائرة = $\frac{1}{2}$ المحيط × نصف القطر = ط نق^{2}

وفى هذا القانون ط = $\frac{22}{7}$ (١ — $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$) = ٣٫١٤١٦ تقريبا

٢٥ — مساحة القطعة الدائرية

إن القطعة ا حـ ب ى هى الفرق بين القطاع ا ب حـ ، المثلث ا ب و





واذن تكون مساحتها مساوية الى

$\frac{1}{2}$ نق^{2} (هـ — حا هـ)

فاذا علم السهم والوتر من قطعة أو علم وتر القطعة ووتر نصف قوسها فمقدارا نق ، هـ يمكن حسابهما كما تقدم بيانه والمعادلات التى تستعمل هى

$$\left.\begin{aligned} ٢\,نق &= \frac{حـ^{2}}{٤\,س} + س \\ ظا\,\tfrac{1}{4}\,هـ &= \frac{٢\,س}{حـ} \end{aligned}\right\}$$

أو

$$\left.\begin{aligned} \text{جتا}\ \tfrac{1}{4}\,\text{هـ} &= \frac{\text{ح}_{1}}{2\,\text{ح}_{2}} \\ 2\,\text{ى} &= \text{ح}_{2}\ \text{قتا}\ \tfrac{1}{4}\,\text{هـ} \end{aligned}\right\}$$

٢٦ — قوانين تقريبية لمساحة قطعة دائرية

ان حساب ى ، هـ لأجل استعمال القانون $\tfrac{1}{2}\,\text{ى}^{2}\,(\text{هـ} - \text{حا هـ})$ فى تعيين المساحة متعب نوعا وفى كثير من الأحوال العملية يستحسن استعمال قانون تقريبي لتعيين المساحة مشتمل على الكميات ح_{1} ، س أو ح_{1} ، ح_{2} ، س

وهناك كثير من القوانين التقريبية وبعضها يعطى نتائج مضبوطة جدا أدق فى الحقيقة من القانون المضبوط للأقواس التى فيها سـ صغير جدا بالنسبة لمقدار حـ وذلك لأنه فى حالة استعمال القانون المضبوط حينما يكون الكسر $\frac{\text{سـ}}{\text{حـ}}$ صغيرا جدا ويكون بناء على ذلك مقدار هـ صغيرا أيضا يكون كل من هـ ، حا هـ متساويين تقريبا ولذا يحتاج الى دقة عظيمة فى تعيين هـ ، حا هـ ليكون مقدار الفرق بينهما مضبوطا نوعا

وفى هذه الأحوال تكون القوانين التقريبية هى الأدق وبعضها قد يكون دقيقا للغاية

(١) وأول تقريب غير مضبوط يتحصل باستعمال قانون سمبسون الذى يعطى مقدار الارتفاع المتوسط للقطعة مساويا الى $\tfrac{2}{3}$ سـ والارتفاع الأعظم هو فى الوسط ويساوى السهم وعلى ذلك يكون القانون المستنتج من ذلك هو

$$\text{مساحة القطعة} = \tfrac{2}{3}\ \text{سـ} \times \text{الوتر}$$

(٢) وهناك قانون آخر أقل ضبطا الا أنه يستحق الذكر اذ بمزجه بالقانون السابق يتحصل قانون مضبوط ضبطا لا بأس به حتى فى حالة نصف الدائرة وهذا القانون التقريبي هو

$$\text{مساحة القطعة الصغيرة} = \frac{٢}{٣}\,\text{س} \times \text{القوس}$$

(٣) فاذا استخرج قانون من هذين القانونين السابقين بأخذ $\frac{٧}{١٠}$ من القانون الأول و $\frac{٣}{١٠}$ من القانون الثانى فان الناتج يكون مضبوطا الى جزء من ١٧٠ جزءا حتى فى حالة ما تصل القوس الى نصف محيط الدائرة وهذا القانون هو

$$\text{المساحة} = \frac{٢}{٣}\,\text{س} \times \frac{٧\,\text{وتر} + ٣\,\text{قوس}}{١٠}$$

(٤) اذا أخذ طول القوس مساويا الى $\frac{١}{٣}(٨\,\text{ح}_{٢} - \text{ح}_{١})$ فاننا نحصل على القانون

$$\text{المساحة} = \frac{١}{١٥}\,\text{س}\,(٦\,\text{ح}_{١} + ٨\,\text{ح}_{٢})$$

والخطأ فى هذا القانون هو واحد من مائة فى نصف الدائرة و يتناقص خطأه بسرعة عظيمة فى القطع الصغيرة وهناك قانونان آخران مذكوران فى بند ٢٨

٢٧ — اثبات القوانين المذكورة

[يحتاج الاثبات لمعرفة هذين القانونين

$$\text{حا}\,ا = ا - \frac{ا^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{ا^{٥}}{\underline{|٥}} - \frac{ا^{٧}}{\underline{|٧}} + \cdots$$

$$\text{، حا}\,ا = ١ - \frac{ا^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{ا^{٤}}{\underline{|٤}} - \frac{ا^{٦}}{\underline{|٦}} + \cdots$$

ومقدار ا معين بالتقدير الدائرى]

فالقانون المضبوط للمساحة

$$= \frac{1}{2}\,\text{نق}^{2}\,(\text{هـ} - \text{حا هـ})$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{نق}^{2}\left(\frac{\text{هـ}^{3}}{3!} - \frac{\text{هـ}^{5}}{5!} + \frac{\text{هـ}^{7}}{7!} - \ldots\right).$$

وقانون $\frac{2}{3}$ س × الوتر

$$= \frac{2}{3}\left(\text{نق} - \text{نق حا}\,\frac{\text{هـ}}{2}\right) 2\,\text{نق حا}\,\frac{\text{هـ}}{2}$$

$$= \frac{2\,\text{نق}^{2}}{3}\left(2\,\text{حا}\,\frac{\text{هـ}}{2} - \text{حا هـ}\right)$$

وهذا القانون يؤول الى

$$\frac{1}{2}\,\text{نق}^{2}\left(\frac{\text{هـ}^{3}}{3!} - \frac{5}{4}\cdot\frac{\text{هـ}^{5}}{5!} + \frac{21}{16}\cdot\frac{\text{هـ}^{7}}{7!} - \ldots\right).$$

فيكون هذا القانون أقل من الحقيقة بالمقدار

$$\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{\text{هـ}^{5}}{5!} - \frac{5}{32}\cdot\frac{\text{هـ}^{7}}{7!} + \ldots\right)\text{نق}^{2}$$

وقانون $\frac{2}{3}$ هـ × القوس

$$= \frac{2}{3}\,\text{نق}^{2}\left(1 - \text{حا}\,\frac{\text{هـ}}{2}\right)\text{هـ}$$

وهذا يؤول الى

$$\frac{1}{2}\,\text{نق}^{2}\left(\frac{\text{هـ}^{3}}{3!} - \frac{5}{12}\cdot\frac{\text{هـ}^{5}}{5!} + \frac{8}{48}\cdot\frac{\text{هـ}^{7}}{7!} - \ldots\right)$$

واذن فيكون أكبر من الحقيقة بقدر

$$\left(\frac{7}{24}\cdot\frac{\text{هـ}^{5}}{5!} - \frac{41}{96}\cdot\frac{\text{هـ}^{7}}{7!} + \ldots\right)\text{نق}^{2}$$

والقانون المتحصل بمزج هذين القانونين بالنسبة التى هى $\frac{\text{٧ وتر} + \text{٣ قوس}}{\text{١٠}}$ هو صحيح لحد $\text{هـ}^{\text{٥}}$ وأصغر من الحقيقة بقليل ومقدار النقص فيه هو

$$\frac{\text{٣}}{\text{١٦٠}} \cdot \frac{\text{هـ}^{\text{٧}}}{\text{٧}!} - \text{قوى هـ الأعلى من القوة السابعة}$$

والقانون المؤسس على هذا والمستنتج بوضع $\frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\text{٨}\,\text{حـ}_{\text{٢}} - \text{حـ}_{\text{١}}\right)$ للقوس هو أقل ضبطا بقليل لأن $\frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\text{٨}\,\text{حـ}_{\text{٢}} - \text{حـ}_{\text{١}}\right)$ أقل من الحقيقة بقليل الا أنه مع هذا يكون الضبط عظيما جدا فى الأقواس التى هى أقل من نصف المحيط

ملحوظة — من المعلوم أنه حينما لا يكون مقدار هـ أقل من الوحدة لا يكون من الواضح أن القانون الذى يخالف القانون الصحيح فى القوى العليا للكمية هـ فقط أدق من القانون الذى يبتدئ فى الاختلاف عن الحقيقة فى القوى الصغرى للكمية هـ وليس هذا هو الحال على الدوام فى الواقع الا أنه اذا كان هذا القانون مضبوطا بالنسبة لمقدار معين للزاوية هـ فان هذا الضبط يكون أعظم بالنسبة للمقادير الصغرى للكمية هـ وسنجرب دقة هذه القوانين المختلفة فى حالة نصف الدائرة بحساب المساحة المعينة بكل قانون من هذه القوانين ثم المعينة بالقانون المضبوط ثم نقارن النتائج

ففى هذه الحالة يكون

$$\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\,\text{س} \times \text{الوتر} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{نق}^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}} \times \text{١,٣٣٣٣}$$

$$\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\,\text{س} \times \text{القوس} = \frac{\text{٢ط}}{\text{٣}}\,\text{نق}^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}} \times \text{٢,٠٩٤٤}$$

$$\left(\frac{\text{٧}}{\text{١٠}}\,\text{١,٣٣٣٣}\,\text{نق}^{\text{٢}}\right) + \frac{\text{٣}}{\text{١٠}}\,\text{٢,٠٩٤٤}\,\text{نق}^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}} \times \text{١,٥٦١٧}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{١٥}}\,\text{س}\left(\text{٦}\,\text{حـ}_{\text{١}} + \text{٨}\,\text{حـ}_{\text{٢}}\right) = \text{نق}^{\text{٢}} \times \text{١,٥٥٤٢}$$

$$\text{القانون المضبوط} = \text{نق}^{\text{٢}} \times \text{١,٥٧٠٨}$$

فالقانون $\frac{٢}{٣}$ سـ × القوس غير مضبوط بالمرة لقوس كبير كهذا الا أنه يفيد فى تصحيح القانون $\frac{٢}{٣}$ سـ × الوتر والطول الصحيح اللازم لأن يضرب فيه $\frac{٢}{٣}$ سـ أطول من الوتر وأقصر من القوس ومقداره التقريبي هو

الوتر + $\frac{٣}{١٠}$ زيادة القوس على الوتر

والخطأ فى القانون المصحح بموجب ذلك هو ١ من ١٥٠ فى حالة نصف الدائرة

٢٨ – وعلاوة على هذه القوانين فهناك قانون فيه $\frac{٢}{٣}$ سـ مضروبا فى خط طوله قريب جدا على قدر الامكان من الطول المطلوب محصور بين الوتر والقوس وهذا القانون هو

$$\text{المساحة} = \frac{٢}{٣} \text{سـ} \sqrt{\text{حـ}^٢ + \frac{٨}{٥}\text{سـ}^٢}$$

وهو قانون مضبوط جدا بالنسبة للأقواس الصغيرة والخطأ فيه يساوى ١ من ٢٠٠ فى نصف المحيط وهناك تعديل لهذا القانون يستحق الالتفات وفيه خطأ يبلغ نحو ١ من ٨٠٠ فى نصف المحيط وهو مضبوط جدا بالنسبة للأقواس الصغيرة الا أنه أقل ضبط من القانون المضبوط السابق ذكره وذلك القانون هو

$$\text{المساحة} = \frac{٢}{٣} \text{سـ} \sqrt{\text{حـ}^٢ + \left(\frac{٥}{٤}\text{سـ}\right)^٢}$$

فاذا أخذت نقطة ـے أو ى َ على حـ ى بحيث يكون ى ـے = $\frac{٥}{٨}$ ى حـ أى يكون ـب ف فى الشكل = $\frac{٥}{٤}$ حـ ى فان الخط ا ف يصير مساويا الى $\sqrt{\text{حـ}^٢ + \left(\frac{٥\,\text{سـ}}{٤}\right)^٢}$ وبناء على القانون المذكور قبلا تكون مساحة القطعة ا ـب حـ ى مساوية بالتقريب جدا الى $\frac{٢}{٣}$ حـ ى × ا ف أو $\frac{٤}{٣}$ حـ ى × ا ـے

والفرق بين هذين القانونين ليس عظيما لأن $\frac{٨}{٥}$ سـ^٢ = ١,٦ سـ^٢ ، ($\frac{٥}{٤}$ سـ)^٢ = ١,٥٦٢٥ سـ^٢ وهـذا الفرق يرجح جانب القانون الأصلى فى حالة ما تكون القطعة صغيرة الا أنه يرجح جانب القانون المعـدل فى حالة ما تكون القطعة كبيرة وهذا القانون الأخير أيضا أسهل تطبيقا فى الأعمـال وذلك لأنه فى كثير من الأحوال يكون الخط ا ء أو ا ف أو الخط المضاعف ا ء + ء ب ممكنا قياسه بسهولة مثل سهولة قياس الخط ا ب

وإذن فالقانون $\frac{٢}{٣}$ حـ ى × ا ف أسهل فى الحساب من القانون

$$\frac{٢}{٣} \text{ حـ ى } \sqrt{\text{ا ب}^٢ + \frac{٨}{٥} \text{ حـ ى}^٢}$$

وفى القياس التقريبى فى الأحوال التى يكون فيها $\frac{٢}{٣}$ حـ ى ، ا ب مضبوطا ضبطا كافيا مع شدة الاحتياج لضبط أكثر فمن المفيد ملاحظة أن هذه الدرجة من الضبط يمكن الحصول عليهـا بمجرد قيـاس ا ب بشريط رخو بشرط أن لا تكون رخاوته متجاوزة الحد والطول ا ء + ء ب هو فى الحقيقة قيـاس رخو للخط ا ب وهذه الرخاوة يترتب عليهـا أن النقطة المتوسطة من الشريط يمكن دفعهـا الى نقطة ء البعيدة عن ا ب بارتفاع مساو الى $\frac{٥}{٨}$ سهم القوس

٢٩ — امتحان دقة القانونين

$$\frac{٢}{٣} \text{ سـ } \sqrt{\text{حـ}^٢ + \frac{٨}{٥} \text{ سـ}^٢} \quad ، \quad \frac{٢}{٣} \text{ سـ } \sqrt{\text{حـ}^٢ + (\frac{٥}{٤} \text{ سـ})^٢}$$

كل من هذين القانونين هو بالصورة

$$\frac{٢}{٣}\,س\,حـ\sqrt{١ + م\,\frac{س^{٢}}{حـ^{٢}}} = \frac{٢}{٣}\,س\,حـ\sqrt{١ + \frac{١}{٤}\,م\,ظا^{٢}\,\frac{١}{٤}\,هـ}$$

وهذا المقدار يساوى تقريبا

$$\frac{٢}{٣}\,س\,حـ\sqrt{١ + \frac{١}{٦٤}\,م\,هـ^{٢}}$$

$$\text{أو}\ \frac{٢}{٣}\,س\,حـ\left(١ + \frac{١}{١٢٨}\,م\,هـ^{٢}\right)$$

وبمقتضى ما ذكر فى بند ٢٧ يكون.

$$\frac{٢}{٣}\,س\,حـ = \frac{١}{٢}\,نق^{٢}\left(\frac{هـ^{٣}}{\lfloor ٣} - \frac{٥}{٤}\,\frac{هـ^{٥}}{\lfloor ٥} + \ldots\ldots\right)$$

وهـذا المقـدار اذا ضرب فى $١ + \frac{١}{١٢٨}\,م\,هـ^{٢}$ فان معامل $\frac{١}{٢}\,نق^{٢}\,\frac{هـ^{٥}}{\lfloor ٥}$ يصير مساويا $\frac{٢٠م}{١٢٨} - \frac{٥}{٤}$

والقانون الصحيح يستدعى أن يكون هذا المعامل مساويا الى -١ (بند ٢٧) واذن فيلزم أن يكون مقدار م محققا لهذه المعادلة

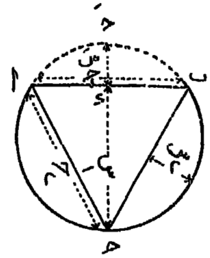
$$\frac{٢٠م}{١٢٨} - \frac{٥}{٤} = -١$$

واذن يكون $م = \frac{٨}{٥}$

وعلى ذلك يكون القانون الأول صحيحا لغاية مقدار $هـ^{٥}$ والثانى قريبا من ذلك الا أنه ليس تام الضبط فاذا كان $م = \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢}$ فمقدار $\frac{٢٠م}{١٢٨} - \frac{٥}{٤}$ هو $-١\,\frac{٣}{٥١٢}$ بدلا من -١ واذن ففى المقادير الصغيرة للزاوية هـ يكون المقدار الذى يعطيه هذا القانون الثانى أقل من الحقيقة بمقدار $\frac{٣}{٥١٢}$. من $\frac{١}{٢}\,نق^{٢}\,\frac{هـ^{٥}}{\lfloor ٥}$ وهذا خطأ نسبى يساوى $\frac{٣\,هـ^{٢}}{١٠٢٤٠}$ واذن فليس له أهمية عظيمة

٣٠ — مساحة القطعة الأكبر من نصف دائرة

(١) فى حساب مساحة قطعة أكبر من نصف دائرة ربما يكون الأحسن فى معظم الأحوال أن نحسب ىق ٥ هـ وان نستعمل القانون النظرى $\frac{1}{2}$ ىق^2 (هـ — حا هـ) الا أنه فى حالة عدم وجود كتب جداول يحسن أن نبحث قانونا تقريبيا



(٢) وهناك طريقة هى أن تضم مساحة المثلث ا ب حـ الى مساحة قطعتى الدائرة الصغيرتين وهذا يعطى

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2} حـ_1 س_1 + \frac{4}{3} س_2 \sqrt{\frac{حـ_2^2}{2} + \left(\frac{5}{4} س_2\right)^2}$$

أو قانونا آخر مكافئا له متعلقا بالقانون المنتخب لحساب القطع الدائرية الصغرى ومن الضرورى لهذا الغرض أن نحسب $س_2$

فعندنا $حـ_2^2 = ٢ ىق س_1$

وبمثل ذلك $حـ_3^2 = ٢ ىق س_2$

واذن $\frac{س_2}{س_1} = \frac{حـ_3^2}{حـ_2^2} = \frac{حـ_2}{٢ حـ_2 + حـ_1}$ وذلك بموجب بند ٢٠

وهذا يعطى جميع البيانات اللازمة

(٣) وهناك طريقة أخرى وهى حساب مساحة جميع الدائرة ثم القطعة ا حَ ب والفرق هو المساحة المطلوبة

ولهذا الغرض نحتاج لحساب سَ المساوى الى $\frac{1}{4}$ حـ^2 ÷ س

واذن فتكون مساحة الدائرة = $\frac{١}{٤}$ ط (س + سَ)^{٢}

ومساحة القطعة ا حَ ب = $\frac{٤}{٣}$ سَ $\sqrt{\frac{١}{٤}\text{حَ}^{٢} + \frac{٢}{٥}\text{سَ}^{٢}}$

وتكون المساحة المطلوبة = $\frac{١}{٤}$ ط (س + سَ)^{٢} − $\frac{٤}{٣}$ سَ $\sqrt{\frac{١}{٤}\text{حَ}^{٢} + \frac{٢}{٥}\text{سَ}^{٢}}$

وهذه الطريقة الثانية ربما كانت أسهل من الأولى وهى أيضا أضبط متى كان حـ أقل من س وذلك لأنه اذا كان حـ أقل من س فانه يكون أقل من $\frac{\text{حـ}}{٢}$ ومتى كان أقل من $\frac{\text{حـ}}{٢}$ فالقطعة ا حَ ب تكون أقل من القطعة التى قاعدتها $\frac{\text{حـ}}{٢}$.

٣١ — العمق الايدروليكى المتوسط

وهناك كمية مهمة مرتبطة بمسائل حركة المياه فى الترع والمواسير وتلك الكمية هى النسبة بين مساحة القطاع العرضى للماء الى طول المحيط المغمور من ذلك القطاع العرضى وهذه النسبة تسمى العمق الايدروليكى المتوسط أو نصف القطر الايدروليكى ويرمز لها عادة بالرمز م

وهذا الاسم الاصطلاحى صحيح مهما كان شكل القطاع العرضى الا أنه بما أن القطاع العرضى للواسير هو مستدير عادة فيرى أنه من الموافق أن ندخل الاصطلاح فى مسألة مسائح وأقواس القطع الدائرية

واذن ففى الشكل يكون م = $\frac{\text{مساحة القطعة ا حـ ب}}{\text{طول القوس ا حـ ب}}$

واذن فيكون مقدار م طولا لو ضرب فى طول القوس فانه يعطى المساحة وحينما يكون العمق س صغيرا فان م = $\frac{٢}{٣}$ س تقريبا لأن $\frac{٢}{٣}$ س × القوس يساوى المساحة تقريبا فى حالة ما تكون القطعة صغيرة كما تقدم

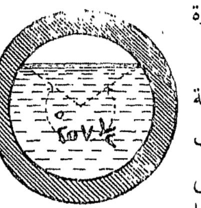
وعلى وجه العموم

$$\frac{\text{مساحة القطعة}}{\text{طول القوس}} = \frac{\frac{1}{2}\,نق^{2}\,(هـ - حا\,هـ)}{نق\,هـ} = \frac{1}{2}\,نق\left(1 - \frac{حا\,هـ}{هـ}\right)$$

واذن تكون

$$م = \frac{1}{2}\,نق\left(1 - \frac{حا\,هـ}{هـ}\right)$$

و يصل نصف القطر الايدروليكى (أو العمق الايدروليكى المتوسط) نهايته العظمى حينما تكون الزاوية المركزية المحددة بالقوس المغمور $\frac{1}{2}$ ٢٥٧ وفى هذه الحالة يكون الجزء الممتلئ من الماسورة نحو سبعة أثمانها



وسرعة تحرك الماء داخل الماسورة الموضوعة على انحدار معلوم مناسبة للجذر التربيعى لنصف القطر الايدروليكى ويبلغ نهايته العظمى بناء على ذلك حينما يكون ممتلئا من الأنبوبة نحو سبعة أثمانها

٣٢ — قانون تقريبى لتعيين نصف القطر الايدروليكى

وفى حساب نصف القطر الايدروليكى حينما يكون كل من وتر القوس وسهمه معلومين أو حينما يعلم وتر القوس ووتر نصفه يمكن الحصول على قانون مضبوط جدّا باستعمال القانونين

المساحة $= \frac{1}{15}\,س\,(٨\,ح_{٢} + ٦\,ح_{١})$ والقوس $= \frac{1}{3}\,(٨\,ح_{٢} - ح_{١})$

وكل من هذين القانونين أقل بقليل من المقدار الحقيقى وقد يتفق أن خارج قسمتهما يكون مضبوطا ضبطا عظيما والقانون الذى يتحصل بهذه الكيفية هو

$$م = \frac{س}{٥} \times \frac{٨\,ح_{٢} + ٦\,ح_{١}}{٨\,ح_{٢} - ح_{١}}$$

والخطأ فى حالة نصف الدائرة يزيد قليلا جدّا عن ١ من ١٠٠٠

والخطأ فى حالة ما تكون هـ = ٢٤٠° وهى الحالة التى يكون فيها وتر القوس مساويا لوتر نصفه هو نحو ١ من ٢٠٠ وفى القطع الدائرية التى هى أكبر يزيد الخطأ تدريجا فى أول الأمر الى أن يصل الى ٢٠ فى المائة فى الدائرة التامة وبناء على ذلك يجب أن لا يستعمل القانون فى القطع التى فيها $\text{ح}_{١}$ ينقص بكثير عن $\text{ح}_{٢}$ وفى هذه الأحوال اذا وجدت الجداول فمقدار ن ، هـ يجب أن يعينا بالحساب ثم يستعمل القانون المضبوط $\frac{١}{٢}$ ن $\left[١ - \frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}}\right]$ واذا لم توجد الجداول فيجب أن نحسب ن ، سَ ، $\text{حَ}_{٢}$ مع استعمال القانون

$$\text{م} = \frac{\text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة القطعة المكملة}}{\text{المحيط} - \text{القوس المكمل}}$$

وفى ايجاد مساحة القطعة المكملة ربما يكون الأحسن استعمال القانون $\frac{١}{١٥}$ السهم (٧ الوتر + ٣ القوس) وذلك لأن القوس يجب أن يحسب لأجل تعيين مقام الكسر

تمرينات (٣)

(١) المطلوب بيان أن مساحة نصف دائرة نصف قطرها متر واحد محسوبة من القانون $\frac{٢}{٣}$ س $\sqrt{\text{حـ}^{٢} + \frac{٨}{٥}\text{س}^{٢}}$ هى ١,٥٧٧٦ مترا مربعا وأن هذه المساحة محسوبة من القانون $\frac{٢}{٣}$ س $\sqrt{\text{حـ}^{٢} + \left(\frac{\text{٥س}}{٤}\right)^{٢}} = ١,٥٧٢٣$ مترا مربعا وأن المساحة الحقيقية = ١,٥٧٠٨ مترا مربعا وبيان أن الخطأ النسبى فى النتيجة الأولى هو نحو ١ من ٢٠٠ بينما الخطأ فى الثانية هو ١ من ٨٠٠

(٢) سهم قوس يساوى ١٠ سنتيمترات والطول ا ءَ + ءَ ب يساوى $٢٣\frac{١}{٢}$ سنتيمترا والمطلوب حساب المساحة الى أقرب سنتيمتر مربع

(٣) المطلوب حساب القطعة التي وترها (حـ) يساوي ٤٠ مترا وسهمها (سـ) = ٨ أمتار (١) من القانون $\frac{٢}{٣}$ سـ $\sqrt{حـ^{٢} + \frac{٨}{٥} سـ^{٢}}$ (٢) من القانون $\frac{٢}{٣}$ سـ $\sqrt{حـ^{٢} + (\frac{٥ سـ}{٤})^{٢}}$ (٣) من القانون $\frac{سـ}{١٥}$ (٦ حـ + ٨ $حـ_{٢}$) مع فرض أن $حـ_{٢}$ هو وتر نصف القوس

(٤) المطلوب ايجاد نصف قطر الدائرة والزاوية المركزية في القطعة المذكورة في المسألة السابقة

(٥) المطلوب ايجاد مساحة تلك القطعة من القانون $\frac{١}{٢}$ $نق^{٢}$ (هـ — حا هـ)

(٦) اذا كان $ا_{١}$ = $\frac{٢}{٣}$ سـ $\sqrt{حـ^{٢} + \frac{٨}{٥} سـ^{٢}}$ ، $ا_{٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ سـ × $\sqrt{حـ^{٢} + (\frac{٥ سـ}{٤})^{٢}}$ فالمطلوب بيان أن $ا_{٢}$ = $ا_{١}$ (١ — $\frac{٣ سـ^{٢}}{١٦٠ حـ}$) تقريبا اذا كان مقدار سـ صغيرا بالنسبة الى حـ

(٧) عمق الماء في حوض اسطواني طوله ٣ أمتار هو ٤٠ سنتيمترا والطول ا ف المقاس من احدى نهايتي الماء الى نقطة فوق سطح الماء من الجهة الأخرى بقدر ٥٠ سنتيمترا يساوي مترين والمطلوب ايجاد حجم الماء الموجود في الحوض

(٨) المطلوب ايجاد مساحة القطعة التي وترها يساوي ١٠ سنتيمترات وسهمها يساوي ١٢ سنتيمترا

(٩) المطلوب ايجاد مساحة قطعة دائرية حينما يكون وتر القوس كله ٢٠ سنتيمترا ووتر نصف القوس ١٢ سنتيمترا

(١٠) المطلوب ايجاد المساحة حينما يكون وتر القوس كله ١٢ سنتيمترا ووتر نصف القوس يساوي ٢٠ سنتيمترا .

(١١) المطلوب ايجاد النسبة بين الوتر والسهم لقطعة دائرية حينما تكون الزاوية المركزية هـ المحدّدة بالقوس $\frac{١}{٢}$ ٢٥٧°

(١٢) المطلوب ايجاد النسبة بين وتر القطعة المذكورة فى المسألة السابقة ونصف قطر الدائرة

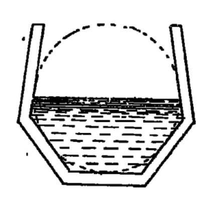
(١٣) المطلوب ايجاد نصف القطر الايدروليكى م حينما تكون الزاوية هـ = $\frac{١}{٢}$ ٢٥٧°

(١٤) اذا كان الماء يسيل بالاستمرار فى ماسورة اسطوانية نصف قطرها نق ذات انحدار قليل فالمطلوب ايجاد مقدار م (١) حينما تكون الماسورة مملوءة الى النصف (٢) حينما تكون ممتلئة امتلاء تاما

(١٥) ان مقدار الماء الذى يصرّفه مجرى على انحدار معين مناسب للساحة ا للقطاع العرضى للماء مضروبا فى $\sqrt{م}$ ففى المواسير السابق ذكرها المطلوب ايجاد ا $\sqrt{م}$ (١) حينما تكون المواسير ممتلئة الى النصف (٢) حينما تكون المواسير مملوءة ملأً تاما

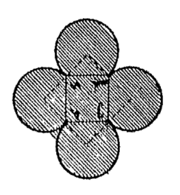
(١٦) المطلوب ايجاد مقدار ا $\sqrt{م}$ فى المواسير المذكورة حينما يكون مقدار م نهاية عظمى أى حينما تكون زاوية هـ $\frac{١}{٢}$ ٢٥٧°

(١٧) المطلوب ايجاد مقدار ا $\sqrt{م}$ حينما يكون هـ = ٣٠٨°



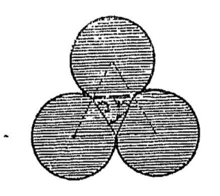
(١٨) القطاع العرضي لمجرى ماء هو على شكل كثير الأضلاع ممكن رسمه حول دائرة والمطلوب بيان أنه اذا كان الماء فيه بارتفاع مركز تلك الدائرة فان نصف القطر الايدروليكي يساوي ½ نصف قطر الدائرة

(١٩) المطلوب ايجاد نصف القطر الايدروليكي حينما تكون الماسورة الاسطوانية التي نصف قطرها متر واحد ممتلئة الى ٨٥ سنتيمترا



(٢٠) المطلوب ايجاد حجم عمود مبني من الحجر بارتفاع ٦ أمتار اذا كان قطاعه العرضي كما هو مبين بالرسم وكان ضلع المربع الداخل ٠٫٣٠ مترا وكانت القطع الدائرية متماسة في النقط ا ، ب ، حـ ، و

(٢١) المطلوب ايجاد حجم عمود من الحجر ارتفاعه ٦ أمتار وقطاعه العرضي كما هو مبين بالرسم وضلع المثلث المتساوي الأضلاع ا ب حـ = ٣٠ سنتيمترا والقطع الدائرية متماسة في ا ، ب ، حـ



(٢٢) المطلوب ايجاد طول قوس قطعة دائرية سهمها ٦ سنتيمترات ووترها ٢٠ سنتيمترا

(٢٣) المطلوب ايجاد مساحة القطعة المذكورة ونصف قطرها الايدروليكى

(٢٤) المطلوب ايجاد نصف القطر الايدروليكى لهذه القطعة من القانون

$$\text{م} = \frac{١}{٢}\,\text{ى}\left(١ - \frac{\text{حاهـ}}{\text{هـ}}\right)$$

(٢٥) المطلوب بيان انه اذا كانت زاوية هـ صغيرة فان $١ - \frac{\text{حاهـ}}{\text{هـ}} = \frac{٤}{٣}\left(١ - \text{حا}\,\frac{١}{٢}\,\text{هـ}\right)$ مع استنتاج القانون التقريبى $\text{م} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}$

(٢٦) المطلوب بيان انه فى القطع الدائرية الصغيرة جدا يؤول القانون

$$\text{م} = \frac{\text{س}}{٥}\cdot\frac{٨\,\text{ح}_٢ + ٦\,\text{ح}_١}{٨\,\text{ح}_٢ - \text{ح}_١} \quad \text{الى} \quad \text{م} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}$$

(٢٧) المطلوب حساب الخطأ فى القانون $\text{م} = \frac{\text{س}}{٥}\cdot\frac{٨\,\text{ح}_٢ + ٦\,\text{ح}_١}{٨\,\text{ح}_٢ - \text{ح}_١}$ فى حالة نصف الدائرة

(٢٨) قوس قطعة دائرية يساوى ٥ أمتار ووتره يساوى ٤ أمتار فما مساحة القطعة

(٢٩) قوس قطعة دائرية يساوى ٨ أمتار ووتره يساوى ٤ أمتار فما مساحة القطعة

(٣٠) المطلوب ايجاد القطاع العرضى الداخلى لماسورة اسطوانية من الحديد سمكها سنتيمتر واحد وطول محيطها الظاهر ٢٠ سنتيمترا

(٣١) ما هو المقدار اللازم طرحه من $\frac{\text{ح}^٢}{٤\,\text{ط}}$ لأجل ايجاد مساحة قطاع دائرى لماسورة حينما يكون ح هو المحيط الخارجى ويكون المطلوب ايجاد المساحة الداخلة مع فرض أن السمك يساوى س

(٣٢) المطلوب تطبيق نتيجة مسألة ٣١ على حل مسألة ٣٠

مقاسات الأراضى

(١) مسائح المضلعات

٣٣ — لنبدأ بفرض مضلع ا ب حـ ى ے ف له قطر طويل ا ى كما هو موضح فى الشكل

فننزل الأعمدة من نقط رؤوس الشكل على ا ى ونقيس طول كل عمود وبعد موقع كل عمود عن نقطة ا

فمساحة الشكل هى مجموع مسائح المثلثات وأشباه المنحرفات التى ينقسم اليها الشكل بهذه الصورة فبالمقاسات المأخوذة نتمكن من حساب هذه المسائح

فمثلا ليكن ا بَ = ٢٥ مترا ، ب بَ = ٢٠ مترا
، ا فَ = ٤٠ » ، ف ف = ٣٥ »
، ا حَ = ٦٠ » ، حـ حَ = ٣٠ »
، ا ےَ = ٩٠ » ، ى ےَ = ٢٥ »
، ا ى = ١١٠ »

فمساحة المثلث ا ب بَ = ½ (٢٥ × ٢٠) = ٢٥٠ مترامربعا
ومساحة شبه المنحرف { ب بَ حَ حـ = ½ (٦٠ — ٢٥) (٢٠ + ٣٠) = ٨٧٥ »
ومساحة المثلث حـ حَ ى = ½ (١١٠ — ٦٠) × ٣٠ = ٧٥٠ »
» » ا ف فَ = ½ (٤٠ × ٣٥) = ٧٠٠ »
ومساحة شبه المنحرف { ف فَ ىَ ى = ½ (٩٠ — ٤٠) (٣٥ + ٢٥) = ١٥٠٠ »
ومساحة المثلث ى ےَ ى = ½ (١١٠ — ٩٠) × ٢٥ = ٢٥٠ »
واذن تكون جملة المساحة = ٤٣٢٥ »

وينبغى أن يلاحظ أن جميع المسائح التى فوق ا ى هى التى شرع فى حسابها أولا ثم حسبت المسائح التى تحت الخط المذكور مع البدء من نقطة ا فى كل حالة

ويمكن أن يدخل الى الحساب بعض الاختصار (١) بتأجيل القسمة على ٢ التى كانت لازمة فى كل حالة الى آخر العمليه أى بأن يحسب ضعف المساحة أولا ثم يقسم المجموع على ٢ (٢) بقسمة كل شبه منحرف الى مثلثين وملاحظة أن المساحة التى فوق ا ى تساوى مجموع المثلثين ا ب حَ ، بَ حَ ى والمساحة التى تحت ا ى تساوى مجموع المثلثين ا ف ىَ ، فَ ىَ ى (وبالبحث ينتج ذلك مباشرة من التساوى بين المثلثين المتحدين فى القاعدة واللذين رؤوسهما على خط واحد مواز للقاعدة)

وبهذه الطريقة تكون المساحة مساوية لمساحة الأربعة المثلثات بدلا من مجموع الستة الأشكال التى بعضها مثلثات وبعضها اشباه منحرفة

واذن فيكون اجراء العملية كما يأتى :

ضعف مساحة كل من المثلثات

ا ب حَ = ا حَ × ب بَ = ٦٠ × ٢٠ = ١٢٠٠ مترا مربعا

، بَ حَ ى = (ا ى − ا بَ) حَ حَ = (١١٠ − ٢٥) × ٣٠ = ٢٥٥٠ «

، ا ف ىَ = ا ىَ × ف فَ = ٩٠ × ٣٥ = ٣١٥٠ «

، فَ ىَ ى = (ا ى − ا فَ) ى ىَ = (١١٠ − ٤٠) × ٢٥ = ١٧٥٠ «

٨٦٥٠ ÷ ٢

المساحة الكلية = ٤٣٢٥ مترا مربعا

٣٤ — والخط ا ء الذى تقاس جميع الأعمـدة منـه يسمى القاعدة والأعمدة تسمى الرأسـيات أو الاحداثيات الرأسـية وطريقـة القياس التى يستعملها المساح فى دفتره المسمى دفتر الغيط هى كما يأتى

تقاس المسافات من مبدأ نقطة ا على طول خط القاعدة الواقعـة عليه الأعمدة وترقم تلك الأبعاد فى العمود الأوسط والرأسيات فى كل من الجانبين توضع فى العمود الخارج المناظر أى أن الأعمدة المقاسة من جهة اليسار توضع فى العمود الأيسر والأعمدة المقاسـة من جهة اليمين توضع فى العمود الأيمن على هذه الصورة

	مـتر	
	الى نقطة ء	
	١١٠	
	٠٩٠	٢٥ ى
٣٠ حـ	٠٦٠	
	٠٤٠	٣٥ ف
٢٠ ب	٠٢٥	
	من نقطة ا	

والأفضل أن يكون هكذا

	ء	الى	
	١١٠	١١٠	
		٩٠	٢٥
٣٠ حـ	٦٠		
		٤٠	٢٥ ى
٢٠ ب	٢٥		
	ا	من	

ومن المقاسات الموضحة فى دفتر الغيط يمكن رسم المضلع ومزية الطريقـة الموضحة فى الشـكل الثـانى أن المسائح يمكن حسابها مباشرة لو أريد فى دفتر الغيط وذلك بحسب الطريقة الموضحة بعد

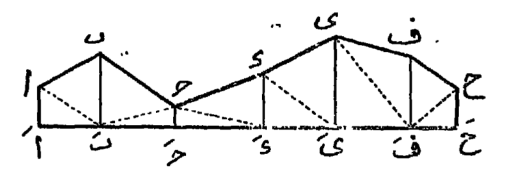
ضعف المساحة	مضاريب					مضاريب	ضعف المساحة	
			الى	ء				
			١١٠	١١٠				
				٠٩٠	٢٥ ى	٧٠	١٧٥٠	
٢٥٥٠	٨٥	٣٠ حـ	٦٠					
				٤٠	٣٥ ف	٩٠	٣١٥٠	
١٢٠٠	٦٠	٢٠ ب	٢٥					
			من	ا			٤٩٠٠	
٣٧٥٠							٣٧٥٠	منقول من اليمين
							٨٦٥٠	÷ ٢

المساحة الكلية = ٤٣٢٥ مترا مربعا

والمضاريب المبينة بالعمود الخاص بها قد حصلت كما يأتى

فالمساحة الواقعة فوق ا ء المناظرة للأعمدة التى فى الجهة اليمنى من دفتر الغيط هى مجموع المثلثين ا ب حَ ، بَ حـ ء فضعف المساحة ا ب حَ = (ا حَ ـــ ٠) ب بَ وضعف المساحة بَ حـ ء = (ا ء ـــ ا بَ) حـ حَ بحيث يكون مضروب كل عمود هو الفرق بين المقاس على القاعدة فوق العمود وتحته مباشرة أى ٦٠ ـــ ٠ لأجل العمود الذى طوله ٢٠ مترا ، ١١٠ ـــ ٢٥ للعمود الذى طوله ٣٠ وبمثل ذلك يكون ٩٠ ـــ ٠ هو المضروب للعمود ٣٥ ، ١١٠ ـــ ٤٠ هو المضروب للعمود ٢٥ ولم يبق من العمل الا اتمام عملية الضرب وجمع الحواصل الناتجة ثم القسمة بعد ذلك على ٢ وهذه الطريقة ممكن تطبيقها على أى عدد من الأعمدة النازلة على خط قاعدة واحد

٣٥ — ولننظر الآن الى الحالة التى تكون فيها الأعمدة من جهة واحدة فقط وفى هذه الحالة يقفل المضلع بالقاعدة وعمودين من الأعمدة



فمثلا اذا أريد ايجاد مساحة مضلع ا َا ب حـ ء ى ف ح ح َ فالمقاس مدون بالعمودين اليساريين فى دفتر الغيط الآتى بيان صورته وهى

دفتر الغيط

ضعف المساحة	المضاريب	الأعمدة	الطول بالمتر
			الى نقطة ح َ
٣٠	٦	ح ٥	٥٦
١٦٠	١٦	ف ١٠	٥٠
٢٤٠	٢٠	ى ١٢	٤٠
١٥٤	٢٢	ء ٧	٣٠
٤٤	٢٢	حـ ٢	١٨
١٨٠	١٨	ب ٢٠	٠٨
٠٤٠	٨	ا ٥	٠
			من نقطة ا
٨٤٨ ÷ ٢			

المساحة = ٤٢٤ مترا مربعا

والأمر الذى ينبغى ملاحظته هو المضروب عند نقطة ح الذى هو ٥٦ — ٥٠
كما هو واضح من الشكل و بمثل ذلك يكون المضروب فى ا هو ٨ — ٠

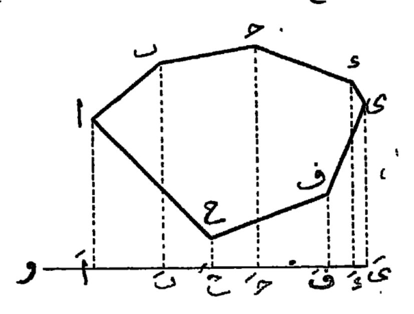
٣٦ — كيفية ايجاد مساحة أى شكل

لننظر أولا الى الحالة التى يكون فيها خط القاعدة خارجا عن المضلع كما فى الشكل ففى هذه الحالة تكون جميع الأعمدة فى جهة واحدة الا أن بعض المسائح يلزم طرحها من البعض الآخر وسنبين هنا طريقتين لحساب المساحة

الطريقة الأولى

فى الطريقة الأولى تعتبر المساحة أنها هى الفرق بين مضلعين كما فى بند ١٣٥ أى بين المضلع اَ ا ب ﺣ ء ى ىَ والمضلع اَ ا ع ف ى ىَ وهذه الطريقة لا توافق الا فى هذه الحالة التى نتكلم عنها حينما تكون الأعمدة جميعها فى جهة واحدة من القاعدة

وفى مثل هذه الحالة التى فيها جميع الأعمدة فى جهة واحدة ليس من المهم أن توضع الأعمدة فى جهة مخصوصة من الجدول لأجل الحساب واذن فنضع الأعمدة الخاصة بالمضلع الأكبر على اليسار والأعمدة الخاصة بالمضلع الأصغر



على اليمين و بعد الحساب نطرح المجموع الأيمن من المجموع الأيسر فلنفرض مثالا رقميا ولنفرض أن الأبعاد المقاسة هى كما يأتى

ا اَ = ٦٠ مترا

اَ بَ = ٣٠ مترا ب بَ = ٨٥ »

اَ حَ = ٧٠ » ح حَ = ٩٠ »

اَ ءَ = ١١٠ » ء ءَ = ٧٥ »

اَ ےَ = ١١٥ » ے ےَ = ٦٥ »

اَ خَ = ٥٠ » خ خَ = ١٠ »

اَ فَ = ١٠٠ » ف فَ = ٣٠ »

فترتيب العمل لأجل حساب المسائح يكون بالصورة الآتية وهى أن ينشأ جدول مشابه لدفتر الغيط غير أن الأعمدة التى جهة اليمين تقاس من نفس الجهــة التى تقاس منها الأعمدة فى جهة اليسار الا أنها توضع على اليمين لأنها تابعة للضلع الذى ستطرح مساحته

	[illegible]	الرأسيات الخاصة بالمضلع السالب	الى ـــَ		الرأسيات الخاصة بالمضلع الموجب	[illegible]	
٩٧٥	١٥	٦٥	١١٥	١١٥	٦٥	٥	٣٢٥
				١١٠	٧٥	٤٥	٣٣٧٥
١٩٥٠	٦٥	٣٠	١٠٠				
				٠٧٠	٩٠	٨٠	٧٢٠٠
١٠٠٠	١٠٠	١٠	٠٥٠				
				٠٣٠	٨٥	٧٠	٥٩٥٠
٣٠٠٠	٥٠	٦٠	٠٠٠	٠٠٠	٦٠	٣٠	١٨٠٠
٦٩٢٥	٢٣٠					٢٣٠	١٨٦٥٠

١٨٦٥٠
٦٩٢٥ منقول من يمينه
١١٧٢٥ ÷ ٢
٥٨٦٢٫٥

الجـــواب المساحة = ٥٨٦٢ $\frac{1}{2}$ مترا مربعا

وينبغى أن يلاحظ أن مجموع المضاريب فى العمود الأيسر يساوى مجموع المضاريب فى العمود الأيمن وكل مجموع من هذين يساوى ضعف المسافة بين $\text{أ}'$ ، $\text{ى}'$ وهذا أمر ثمين جدا لتحقيق الحساب

الطريقة الثانية

فى الطريقة الثانية تعتبر النقط التى فى المضلع مرتبة ترتيبا منتظما مع اللف حول الشكل من نقطة ا الى أن تعود الى نقطة ا وهذه الطريقة أحسن من سابقتها لأنه يمكن أيضا تطبيقها فى حالة ما تكون الأعمدة ليست جميعها فى جهة واحدة من القاعدة ويتوصل اليها بالطريقة الآتية

لتكن أبعاد النقط $\text{أ}'$ ، $\text{ب}'$ ، $\text{حـ}'$ ... الخ عن أى نقطة مثل و على القاعدة مساوية الى $\text{أ}'_{1}$ ، $\text{ب}'_{1}$ ، $\text{حـ}'_{1}$ ... الخ ولنرمز للرأسيات الخاصة بها بالرموز ا_{1} ، ب_{1} ، حـ_{1} ... الخ فحينئذ تكون مساحة كثير الأضلاع هى مجموع مسائح عدد من أشباه المنحرف ومقادير المسائح يمكن أن تبين بالكيفية الآتية ويمكن للطالب أن يتحقق من دقتها فى المثال الخاص الذى أوردناه

$$\text{فالمساحة} = \tfrac{1}{2}(\text{ب}'_{1} - \text{أ}'_{1})(\text{ا}_{1} + \text{ب}_{1}) + \tfrac{1}{2}(\text{حـ}'_{1} - \text{ب}'_{1})(\text{ب}_{1} + \text{حـ}_{1}) + \tfrac{1}{2}(\text{ء}'_{1} - \text{حـ}'_{1})(\text{حـ}_{1} + \text{ء}_{1}) + \tfrac{1}{2}(\text{ى}'_{1} - \text{ء}'_{1})(\text{ء}_{1} + \text{ى}_{1}) + \tfrac{1}{2}(\text{ف}'_{1} - \text{ى}'_{1})(\text{ى}_{1} + \text{ف}_{1}) + \tfrac{1}{2}(\text{ح}'_{1} - \text{ف}'_{1})(\text{ف}_{1} + \text{ح}_{1}) + \tfrac{1}{2}(\text{أ}'_{1} - \text{ح}'_{1})(\text{ح}_{1} + \text{ا}_{1})$$

ويمكن اعادة ترتيب ذلك بحصر الحدود التى يضرب فيها كل عمود بين قوسين الا العوامل التى يضرب فيها ا_{1} فان الأحسن أن تكون مفصولة وبهذا الترتيب يتحصل بعد حذف الحدود المشتركة

ضعف المساحة = ا (ب) + ب (حـ − ا) + حـ (ى − ب)
+ ى (ے − حـ) + ے (ف − ى) + ف (ع − ے)
+ ع (ا − ف) + ا (− ع)

والمعامل المقابل لكل رأسى هو فرق بعد النقطة التالية والنقطة السابقة للنقطة التى رأسيها هو المطلوب ايجاد معامله وليس معامل ا خارجا عن هذه القاعدة الا أن الأولى أن يعتبر على جزئين فالمجموع الجبرى لهذه العوامل يساوى صفرا أى أن مجموع العوامل السالبة يتعادل مع مجموع العوامل الموجبة وهذا الأمر الحقيق يسمح بتحقيق ذى قيمة لمعرفة ضبط تكوين هذه العوامل والترتيب الآتى (المطبق على المثال السابق) يظهر أنه أحسن ترتيب لأجل تعيين مقدار المساحة

	ابعاد مقاسه على القاعدة من نقطه ا	ص	عوامل	ضعف المساحة موجب	ضعف المساحة سالب
	متر	متر	متر	متر مربع	متر مربع
ا	٠٠	٦٠	٣٠	١٨٠٠	
ب	٣٠	٨٥	٧٠	٥٩٥٠	
حـ	٧٠	٩٠	٨٠	٧٢٠٠	
ى	١١٠	٧٥	٤٥	٣٣٧٥	
ے	١١٥	٦٥	−١٠		٦٥٠
ف	١٠٠	٣٠	−٦٥		١٩٥٠
ع	٠٥٠	١٠	−١٠٠		١٠٠٠
ا	٠٠	٦٠	−٥٠		٣٠٠٠
			±٢٢٥	١٨٣٢٥	٦٦٠٠
				٦٦٠٠	

١١٧٢٥ ÷ ٢

المساحة الكلية = ٥٨٦٢,٥٠ مترا مربعا

وفى هذا المثال تكون جميع الرأسيات فى جهة واحدة من القاعدة وجميع الأبعاد المقاسة على القاعدة تتزايد بالتدريج الى أن تصل الى نقطة ى ثم تتنازل ثانيا الا أنه فى الأراضى غير المنتظمة ليس من الضرورى أن تكون الأبعاد المقيسة على القاعدة تابعة لهذه الكيفية المنتظمة فاذا قطع خط القاعدة الأرض فان الرأسيات لا تكون جميعها فى جهة واحدة وفى هذه الحالة الأخيرة يجب أن تعتبر الأعمدة فى احدى الجهتين موجبة والتى فى الجهة الأخرى سالبة

والمثال الآتى يوضح كل حالة من الحالتين الخصوصيتين

المقيد فى دفتر الغيط

		الى ى	
ى	٧١٦	١١٨٠	
و	٤	٧٥٠	
د	١٠٦٥	٧٢٦	
ح	١٧٥	٤٩٢	
		٢١٨	١٠٠ هـ
ب	٢٥٦	١٧٩	
حـ	٤١٣	٤٤	
ا	٧٩	٠٠	
		من ا	

وينبغى للطالب أن يرسم قطعة الأرض بمقتضى ما هو مقيد بهذا بمقياس رسم موافق فالحروف ا ، ب ، حـ .... هـ تدل على الرؤوس المتوالية للضلع ولأجل ايجاد المساحة تتبع الطريقة الآتية بحسب ما سبق بيانه وهى

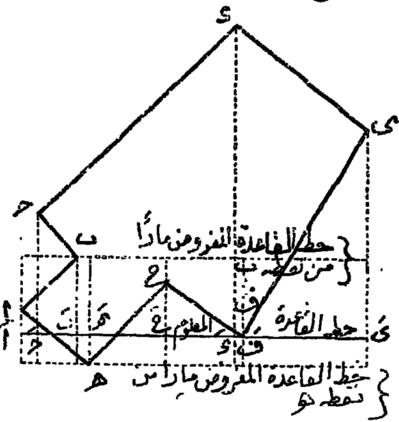
	الأبعاد عن نقطة ا مقاسة على خط القاعدة	الرأسيات	المضاريب	ضعف المساحة	
				موجب	سالب
ا	٠٠	٧٩	١٧٩	١٤١٤١	
ب	١٧٩	٢٥٦	٤٤	١١٢٦٤	
حـ	٤٤	٤١٣	٥٤٧	٢٢٥٩١١	
ء	٧٢٦	١٠٦٥	١١٣٦	١٢٠٩٨٤٠	
ى	١١٨٠	٧١٦	٢٤	١٧١٨٤	
ف	٧٥٠	٤	— ٦٨٨		٢٧٥٢
ح	٤٩٢	١٧٥	— ٥٣٢		٩٣١٠٠
هـ	٢١٨	— ١٠٠	— ٤٩٢	٤٩٢٠٠	
ا	٠٠	٧٩	— ٢١٨		١٧٢٢٢
			± ١٩٣٠	١٥٢٧٥٤٠	١١٣٠٧٤
				١١٣٠٧٤	

٢ ÷ ١٤١٤٤٦٦

المساحة الكلية = ٧٠٧٢٣٣ مترا مربعا

فاذا أخذت القاعدة خطا مارا بنقطة هـ وموازيا للقاعدة الأولى فانه يتخلص من الرأسى السالب الا أن ذلك يترتب عليه زيادة عمليات الضرب وتكون الرأسيات ١٧٩ ، ٣٥٦ ، ٥١٣ الخ بدلا من ٧٩ ، ٢٥٦ ، ٤١٣ ... ويكون رأسى نقطة هـ مساويا للصفر بدلا من — ١٠٠ وينبغى للطالب أن يتم هذا المثال بفرض هذه الرأسيات الجديدة ومن المفيد أيضا فى التمرن أن يأخذ خط القاعدة مارّا من نقطة ب أو من نقطة حـ وموازيا للقاعدة

الأصلية ويلزم أيضا أن يرسم شكل الأرض باعتناء من المقاسات المعلومة فتكون هيئة الرسم كما هو موضح فى الشكل التالى



تمرينات (٤)

المطلوب رسم المضلعات الاتية من واقع المقاسات المستخرجة من دفتر الغيط مع ايجاد هـذه المسائح وملاحظة أن الرأسيات فى كل حالة هى على الترتيب ا ، ب ، حـ . . . وأن الأبعاد مقاسة فى بعض الأحوال من نقطة (و) التى ليست نقطة من نقط المضلع

(١)

	متر	
	الى د	
	٤٦٠	
	٣٤٠	٥٠ حـ
١٦٠ ى	٢٠٠	
١٢٠ ق	١١٠	
	٧٠	١٠٠ ب
	من ا	

(٢)

متر	
الى حـ	
١٠٠	د ٨٠
٧٥	ب ١٠٠
من ا	

(٣)

	متر	
	الى ى	
	١٠٫٠٠	
	٨٫٤٠	٢٫٣٤ ح
٠٫٤٣ ے	٦٫٨٥	
	٥٫٢١	٧٫٣٠ ب
٣٫١٥ ف	٢٫٣٦	
	من أ	

(٤)

	متر	
	١١٫٢٥	٠٫٥٦ ح
٢٫٣٠ ى	٩٫١٨	
	٥٫٣٦	٧٫١٥ ب
	٠٠	٣٫١٥ أ
	من و	

(٥)

	متر	
	الى ى	
	٩٫٧٥	
	٧٫١٥	١٣٫٢٥ ى
	٦٫٠٠	
	٣٫٧٥	٤٫٢ ب
٢٫٩ ف	١٫٥٠	٠٠ أ
	٠٠	١١٫٠ ح
	من و	

(٦)

	متر	
	الى ى	
	٧٫٣٠	
٣٫٨٠ ے	٥٫٢٥	
	٣٫٧٥	١٫٣٢ ح
٤٫٢٥ ف ٠٫٧٤ ب	١٫٢٠	
	من أ	

المطلوب حساب المساحة المحصورة بين خط القاعدة والحدود المعينة بالرأسيات فى الأحوال الآتية والأبعاد معينة بالمتر

(٧)

	متر
٣٥	٤٨٦
١٥	٢٧٦
١٣	٢١٨
٢٢	١٨١
٤٧	١٣٨
١٢٥	٥٥
١١٠	٠٠
	من و

(٨)

	متر
٠٠	٤٣١
١٦	٤٢٣
٢٨	٣٨٥
٤٧	٢٩٤
٥٨	٢٠٨
٥٥	١٤٠
٤٢	١٠
	من و

(٩)

	متر
٠٠	٤٥٥
٢٠	٣٢٩
٣٠	٢٧٣
١٠	١٤٨
٢١	٤٣
	من و

(١٠)

متر	
الى ف	
١٥٠	
١٢٥	١٩
١٠٠	٣٢
٦٥	١٥
٢٠	٣
من أ	

(١١)

متر	
الى ل	
١٠٠	
٩٥	٧
٨٥	١٣
٧٥	٢٠
٦٥	٢٣
٥٥	٢٦
٤٥	٣٠
٣٥	٤٨
٢٥	٥٢
١٥	٣٥
٥	٢١
من أ	

(٢) المسائح المحدّدة بخطوط منحنية

٣٧ — فى المباحث السابقة قد فرضنا أن الحدود مكوّنة من خطوط مستقيمة فاذا كان المحيط كله أو جزء منه منحنيا فان الجزء المنحنى يمكن اعتباره مكوّنا من جملة خطوط مستقيمة قصيرة ثم استعمال الطرق السابقة لتعيين المساحة أو يستعان بطريقة سمبسون (أو بطريقة ودل ان أريد) وفى حالة رسم الأشكال على الورق مثل المنحنيات البيانيـة فى الآلات البخارية فانه يمكن استعمال طرق مخصوصة أبسط وفى بعض الأحيان قد تكون أضبط من طريقة سمبسون

٣٨ — حساب مساحة منحن مستو محصور بين مستقيمين متوازيين بطريقة سمبسون

لذلك يقسم الطول الكلى للمنحنى الى عدد زوجى من الأجزاء المتسـاوية العرض (ل_1) بخطوط مستقيمة موازية للخطين المتطرفين ولتكن أطوال الخطوط القاسمة بما فيها الخطان المتطرفان هى ص ، ص_1 ، ص_2 ...

فبناء على قاعدة سمبسون تكون مساحة الشكل هى

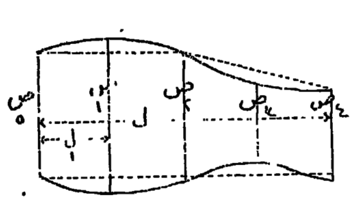
$$= ٢ ل_١ \frac{ص_. + ٤ ص_١ + ص_٢}{٦} + ٢ ل_١ \frac{ص_٢ + ٤ ص_٣ + ص_٤}{٦} + ...$$

$$= \frac{١}{٣} ل_١ (ص_. + ٤ ص_١ + ٢ ص_٢ + ٤ ص_٣ + ...)$$

وعليه فالمساحة (كما فى الشكل) $= \frac{١}{٣} ل_١ (ص_. + ٤ ص_١ + ٢ ص_٢ + ٤ ص_٣ + ص_٤)$

والعرض المتوسط $= \frac{١}{١٢} (ص_. + ٤ ص_١ + ٢ ص_٢ + ٤ ص_٣ + ص_٤)$

وعدد الأجزاء أو العروض التى تقسم اليها المسائح يلزم أن يكون على حسب تغير شكل المنحنى وما يرى للانسان وقت الحساب والدقة المراد الوصول اليها ففى حالة الحاجة الى عناية عظيمة يمكن الحساب مرتين احداهما بحساب عدد



أكبر من الرأسيات المقاسة عن العدد الآخر فاذا اتفق المتوسطان (أو المساحتان) تقريبا فيمكن التعويل على الناتج

ففى هذا الشكل كان من الممكن أن نحسب فى أول الأمر من المقدار $\frac{١}{٦} (ص_. + ٤ ص_٢ + ص_٤)$ ثم من المقدار $\frac{١}{١٢} (ص_. + ٤ ص_١ + ٢ ص_٢ + ٤ ص_٣ + ص_٤)$ أو تقاس الرأسيات الواقعة فى وسط المسافة بين الرأسيات المبينة بالرسم ثم يطبق القانون على التسعة الرأسيات جميعها

٣٩ — طريقة الرأسيات الواقعة فى الوسط — طريقة أشباه المنحرف

اذا أريد حساب المساحة بطريقة أقل ضبطا فانه يمكن حساب المتوسط بين الاحداثيات الفردية فقط أو الزوجية فقط بطرق مماثلة لما فى بند ١٢٨ بشأن حساب القطاع العرضى المتوسط فى حالة الأجسام

والمتوسط المحسوب من الاحداثيات الفردية أو الواقعة فى الوسط (المسماة بطريقة الاحداثيات الواقعة فى الوسط) فى شكل البند السابق هى

$$\frac{١}{٢} \left(ص_{١} + ص_{٣} \right)$$

والمتوسط المحسوب من الرأسيات الزوجية هو

$$\frac{١}{٢} \left(\frac{١}{٢} ص_{٠} + ص_{٢} + \frac{١}{٢} ص_{٤} \right)$$

وهــذه الطريقة الأخيرة معادلة لمعاملة المساحة كما اذا كانت مكوّنة من أشباه منحرفة كما هو موضح بالخطوط المنقطة التى فى الشكل وبما أن مسائح هذه الأشباه المنحرفة هى $ل_{١} \left(ص_{٠} + ص_{٢} \right) + ل_{١} \left(ص_{٢} + ص_{٤} \right)$ فقد تسمى أحيانا طريقة أشباه المنحرفات

وأولى هاتين الطريقتين هى أضبط غالبا فان الضبط فيها ضعف الضبط فى الطريقة الثانيــة اذا كانت طريقة سمبســون مضبوطة ضبطا تاما (أنظر بند ١٢٨ حيث نوقشت هناك مسألة الضبط النسبى فى حالة القطاع العرضى للأجسام فكل ما قيل هناك ينطبق أيضا على الحالة التى نحن بصددها والفرق إنمــا هو فى أن القطاعات العرضية هى هنا خطوط بدلا من سطوح والمقدار الحاصل أخيرا هو مساحة بدلا من أن يكونــ حجما) فاذا لم تكن قاعدة سمبسون مضبوطة ضبطا تاما فمن المحتمل أن المتوسط الحاصل من الرأسيات

الواقعة فى الوسط يكون أضبط من ناتج الطريقة الأخرى بأكثر من مرتين الا أنه يحتمل أن يكون أقل ضبطا من طريقة سمبسون واذا أخذنا قطاعات عرضية عددها كاف فان نقص الضبط يكون قليلا على قدر الارادة وسنشرح طريقة خاصة بالمنحنيات البيانية مؤسسة على طريقة سمبسون الا أنها أدق منها وتلك الطريقة تؤدّى الى قانون مشابه لقانون الاحداثيات الرأسية الواقعة فى الوسط وفى حالة الأشكال العديمة الانتظام بالمرة نتبع طريقة الاحداثيات الواقعة فى الوسط بأخذ جملة احداثيات لأن الطريقة الأخرى تصير متعبة جدّا (أنظر بند ٤٦)

تمرينات (٥)

(١) المطلوب حساب مساحة الشكل الآتى (١) بطريقة أشباه المنحرف (٢) بطريقة الرأسيات الواقعة فى الوسط (٣) بطريقة سمبسون — ورأسيات الشكل هى ١٤,٢ و١٤,٩ و١٥,٣ و١٥,١ و١٤,٥ و١٤,١ و١٣,٧ مترا والأبعاد المتساوية بين الرأسيات هى ٣ أمتار

(٢) المطلوب ايجاد مساحة الشكل نفسه بطريقة ودل

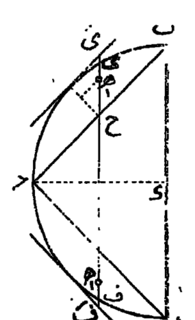
المنحنيات البيانية

٤٠ — تعديل طريقة سمبسون بواسطة المماسات

وفى تطبيق طريقة سمبسون على جزء من المنحنى البيانى يجب أن يقاس العرض الواقع فى الوسط لا من المنحنيات بل من المماسات المرسومة بالتوازى لأوتار المنحنيات. وعلى ذلك لا تكون مسافة العرض الواقع فى الوسط المقاسة فى الشكل الآتى لايجاد المتوسط هى ے ف الكائنة بين نقط المنحنى بل هى ےَ فَ الواقعة بين نقط المماسين المرسومين بالتوازى لوترى القوس الأعلى والأسفل على التناظر

وفى بعض الأحيان يكون الفرق بين القياسين غير مهم وحينما تكون نقط التماس على نهايتى الاحداثى الرأسى الواقع فى الوسط فان القياسين يكونان متساويين الا أنه فى الأحوال النهائية يكون التعديل السابق ذا أهمية عظيمة

فمثلا فى حساب مساحة نصف دائرة بتطبيق واحد لقاعدة سمبسون فان طريقة المماس تعطى النتيجة الآتية



$$\frac{١}{٦}\ \text{حـ ى}\ (\text{أ ب} + ٤\ \text{ىَ فَ})$$

وهى أضبط بأربعة أمثال مما اذا قيس الاحداثى الواقع فى الوسط على المنحنى فقط والخطأ فى طريقة المماس فى هذه الحالة يساوى ١ من ٨٠ والخطأ فى الحالة الأخرى يساوى ١ من ٢٠

وأحسن طريقة لمعرفة مزية هذا التعديل هى أن نحسب مساحة القطعة حـ ب ى فى الشكل السابق فبطريقة المماس كما سبق تطبيقه تكون مساحة القطعة فى الواقع $= \frac{٤\ \text{ىَ ح}}{٦} \times \text{حـ ى} = \frac{٢}{٣}\ \text{ىَ ح} \times \text{حـ ى}$

والآن اذا طبقنا قاعدة سمبسون على هذه القطعة نفسها فاننا بالطبيعة نقيس القطاع الواقع فى الوسط من ح فى اتجاه العمود على ب حـ وفى هذه الحالة تعطينا القاعدة ما يأتى

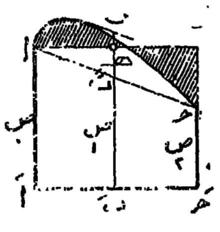
$$\text{مساحة القطعة} = \frac{٢}{٣}\ \text{ارتفاع القطعة} \times \text{ب حـ}$$

ومن السهل أن نرى أن هذين المقدارين للمساحة متساويان فى القيمة وهذا لا يكون لو أخذنا ى ح بدلا من ىَ ح فى القانون الأول من القانونين

السابقين فطريقة المماس لها فائدة أنها تعطى مقدارا للساحة لايتغير مهما كان اتجاه قياس الاحداثى الرأسى الواقع فى الوسط وهذه النتيجة مهمة جدا

واذن ففى جميع المنحنيات البيانية يلزم أن يقاس الرأسى الواقع فى الوسط الى المماس المرسوم موازيا لوتر القوس ولا يستثنى من هذة القاعدة الا الحالة التى يكون فيها المنحنى ذا جزأين مختلفى جهة الانحناء كما فى الشكل الأول من بند ٤٤ ففى مثل هذه الحالة اذا قدرت المساحة بواسطة رأسى واحد واقع فى الوسط فان طريقة المماس تكون أقل ضبطا من طريقة سمبسون نفسها وفى الواقع فانه فى الشكل المشار اليه لا يمكن تطبيق قاعدة المماس فى هذا التقدير لان هناك مماسين كل منهما مواز الى ا ب فأضبط طريقة حينئذ هى أن تقسم المساحة الى جزأين (كما عملنا فى ذلك البند) ثم تطبيق طريقة المماس على كل قسم

٤١ — طريقة الثلثين — ارتفاع المستطيل المكافئ



فى قياس جزء من منحن بيانى بتطبيق واحد لطريقة المماس ليس من الضرورى قياس الارتفاع فى الوسط وفى الطرفين بل يكفى قياس واحد كما سنورى ذلك الآن

فليكن عندنا شكل محصور بين الرأسيين $ص_٠$ ، $ص_٢$ ولنفرض أن طول الرأسى الواقع فى الوسط نَ ب (لحد المماس) يساوى $ص_١$

وليكن ص هو الارتفاع المتوسط للشكل فيكون

$$ص = \frac{ص_٠ + ٤ ص_١ + ص_٢}{٦}$$

والارتفاع ب َ ب ً = $\frac{1}{2}$ (صـ ب + صـ ٢) فاذا رمزنا لهذا الطول بالرمز ى فانه يكون

$$\text{ص} = \frac{1}{6}(4\,\text{ص}_1 + 2\,\text{ى})$$
$$= \text{ى} + \frac{2}{3}(\text{ص}_1 - \text{ى})$$
$$= \text{ب َ ب ً} + \frac{2}{3}\,\text{ب ب ً}$$

وحينئذ اذا أخذنا النقطة هـ على ب ً ب بحيث يكون ب ً هـ = $\frac{2}{3}$ ب ً ب فان ب َ هـ يكون هو الارتفاع صـ المطلوب والخط المار بنقطة هـ موازيا الى ا َ حـ َ يكمل المستطيل الذى مساحته تساوى مساحة الشكل المعلوم وهذه القاعدة التى بها يعين ارتفاع المستطيل المكافئ يطلق عليها غالبا اسم قاعدة الثلثين

وينبغى أن يلاحظ أن أى خط مار من نقطة هـ الى المحيط يكمل شبه المنحرف المكافئ فى المساحة

وينبغى أن يلاحظ أيضا أن المسائح المحصورة بين هذا الخط والمنحنى (أى الأجزاء المظللة فى الشكل) تتعادل مع بعضها أى أن المساحة المظللة فوق الخط تساوى المساحة المظللة تحته وفى كثير من الأحيان يكفى مجرد النظر فى معرفة الوضع الموافق للخط اذا لم يقصد سوى الحصول على تقدير تقريبى للمساحة

واذا كان كل من الحدين المقطوعين بالرأسى الواقع فى الوسط منحنيين فان قاعدة الثلثين يلزم أن تطبق على كل من نهايتى الخط ويكون الارتفاع المتوسط هو البعد بين النقطتين المعينتين بهذه الطريقة (أنظر شكل نصف الدائرة فى بند ٤٠ الذى فيه الارتفاع المتوسط يساوى المسافة بين النقطتين المرقوم عليهما هـ ١)

٤٢ — واذا قسم الشكل الى قسمين فالرأسيات المتوسطة $ص_١$ ، $ص_٢$ للقسمين يمكن تعيينها بالكيفية نفسها واذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ هما عرضا القسمين العموديان على $ص_١$ ، $ص_٢$ فان المساحة تكون

$$ص_١ ل_١ + ص_٢ ل_٢$$

واذا كان مقدارا $ل_١$ ، $ل_٢$ متساويين وهى الحالة التى يكو فيها كل منهما مساويا الى $\frac{١}{٢}$ ل فان مقدار المساحة يؤول الى

$$\frac{١}{٢} (ص_١ + ص_٢) ل$$

واذن ففى هذه الحالة يكون الارتفاع المتوسط $= \frac{١}{٢} (ص_١ + ص_٢)$

٤٣ — وبنفس الطريقة يقسم الشكل الى أى عدد من الأشرطة بخطوط متوازية أبعادها عن بعضها على التناظر $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ ، . . . . فاذا كانت الارتفاعات $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ للمستطيلات المكافئة معلومة فالمساحة

$$= ص_١ ل_١ + ص_٢ ل_٢ + ص_٣ ل_٣ \ . \ . \ .$$

واذا كان $ل_١ = ل_٢ = ل_٣$ . . . الخ $= \frac{١}{ن}$ ل فمقدار المساحة يؤول الى

$$\text{المساحة} = \frac{١}{ن} (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + \ . \ . \ . \ . \ .) ل$$

٤٤ — الرسم البيانى المشتمل على $ص_١$ ، $ص_٢$ ، الخ

لنفرض أن المساحة المحصورة بين الخط المنحنى ا حـ ب والخطوط الثلاثة ا اَ ، اَ بَ ، ب بَ التى منها الخطان ا اَ ، ب بَ متوازيان وانها مقسومة الى جزأين بخط حـ حـَ مرسوم بالتوازى الى الطرفين ا اَ ، ب بَ

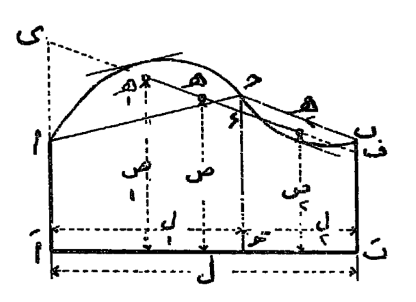
ولنأخذ نقطة $هـ_١$ على الرأسى المنصف للخط ا حـ بحيث يكون بعدها عن ا حـ مساويا الى $\frac{٢}{٣}$ البعد بين ا حـ وبين المماس الموازى الى ا حـ

فتكون نقطة $ه_١$ هى النهاية العليا للرأسى المتوسط أو الارتفاع $ص_١$ للجزء الأيسر من المساحة .

وبمثل ذلك لنفرض أن $ه_٢$ هى النهاية العليا للرأسى المتوسط للقسم الأيمن

فاذا وصلنا $ه_١ ه_٢$ بحيث يقطع حـ حَ فى ء وأخذنا على $ه_١ ه_٢$ نقطة مثل ه بحيث يكون $ه_١$ ه = ء $ه_٢$ فنقطة ه تكون هى النهاية العليا للرأسى المتوسط لجميع المساحة .

وذلك لأنه اذا رسم $ه_٢ ه_١$ بحيث يقابل الخطين الجانبيين فى ب ، ف فان مساحة شبه المنحرف ب أَ بَ ف تساوى مساحة الشكل المعلوم وعليه يكون الرأسى المتوسط لشبه المنحرف هو الارتفاع المتوسط للشكل وعلينا الآن أن نبين أن نقطة ه هى وسط الخط ب ف



وبما أن $ه_١$ ه = ء $ه_٢$ = $\frac{١}{٢}$ ء ف

فيكون ب ه = ب $ه_١$ + $ه_١$ ه = $\frac{١}{٢}$ ب ء + $\frac{١}{٢}$ ء ف = $\frac{١}{٢}$ (ب ف) أى أن ه هى النقطة المتوسطة للخط ب ف

واذن تكون نقطة هـ هى النقطة المطلوبة والرأسى المار بنقطة هـ هو ارتفاع المستطيل المساوى فى القاعدة والمساحة للشكل المفروض وينبغى أن يلاحظ أنه اذا كان جزآ الشكل متساويين فى العرض فنقطة هـ هى نقطة تقاطع هـ١ هـ٢ بالخط حـ حـَ

ومن الواضح أنه يمكن التوسع فى هذا الرسم لايجاد الارتفاع المتوسط حينما تكون المساحة المعلومة مقسومة الى أكثر من قسمين فيوجد أولا الارتفاع المتوسط لكل قسم ثم الارتفاع المتوسط لكل قسمين ثم لثلاثة وهكذا وتوضيح ذلك مبين فيما يأتى

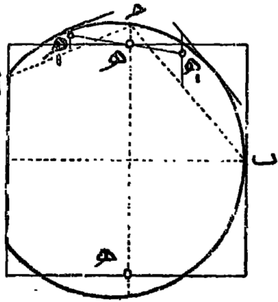
وينبغى أن يلاحظ أن فى هذه الطريقة البيانية ليس من الضرورى أن نرسم الرأسيات المتوسطة المختلفة ص١ ، ص٢ ، . . . وانما الضرورى تعيين النهايات العليا لها هـ١ ، هـ٢ الخ ومن الموافق أن يكون لهذه النقط أسماء خاصة بها والأحسن أن تسمى نقط الارتفاع أو مراكز الارتفاع للاجزاء المختلفة

والشكل الآتى يوضح طرق ايجاد مستطيلات مكافئة فى أحوال قطعة دائرية صغيرة أو قطعة دائرية كبيرة ودائرة تامة وعلى الطالب أن يتم العملية بنفسه على رسم أكبر كثيرا

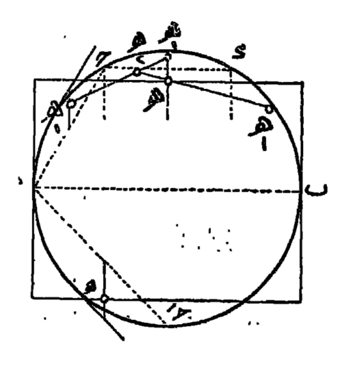


ففى حالة ما تكون القطعة صغيرة يكون من الضرورى فقط ايجاد نقطة ارتفاع واحدة بأخذ نقطة الارتفاع لنصف القطعة التى قوسها هو ا حـ كما أن نقطة الارتفاع للنصف الثانى تكون على الارتفاع المذكور بعينه من القاعدة وقد ظللنا هذا الشكل لأجل أن نبين التوازن فى زيادة مسائح القطعة والمستطيل وهناك طريقة أحسن لأجل هذا البيان وهى تلوين المساحتين الزائدتين بلونين مختلفين

والقطعة الكبرى تقسم الى جزأين متساويين فى العرض بخط رأسى مارّ بنقطة حـ وقد بينت نقطتا الارتفاع العليا من هذين الجزأين بحرفى هـ ١ ، هـ ٢ ونقطة الارتفاع النهائى هـ تتحصل بتكوينهما معا ونقطة الارتفاع السفلى (المسماة هـ أيضا) موضوعة فى الأسفل بمثل ذلك والارتفاع المتوسط هو البعد بينهما



وفى الدائرة قد وجدت نقطة الارتفاع العليا بقسمة نصف الدائرة الأعلى الى ثلاثة أجزاء ثم وجدت نقط الارتفاع هـ ١ ، هـ ١ ، هـ ١ لهذه الأجزاء المختلفة



مع تجميع هذه النقط بالكيفية الموضحة أعلاه أما النقطة السفلى فانها قد وجدت بعملية واحدة و ينبغى للطالب أن يكرر هـذا على رسم مقياسه كبير وأن يقارن الضبط النسبى فى الطريقتين والفرق طفيف جدا .

٤٥ — والقاعدة أنه اذا أريد الحصول على دقة عظيمة فالأحسن أن لا يبحث عن الارتفاع المتوسط بهذا الطريق البيانى بل تقسم المساحة الى عدد كاف من الأشكال المتساوية العرض وأن يبحث عن الارتفاعات المتوسطة لها $ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . وتقاس بالدقة ثم يحسب الارتفاع المتوسط ص للشكل كله من القانون

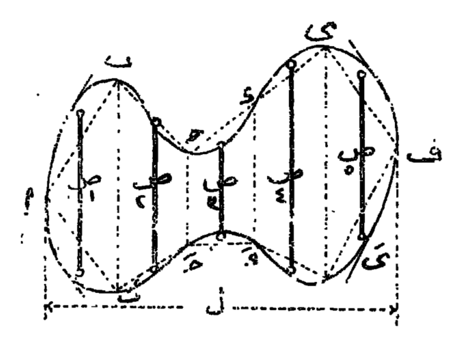
$$ص = \frac{١}{د} (ص_١ + ص_٢ + ...)$$

وفى هذا القانون د هو عدد الأشكال

والسبب فى أن هذه الطريقة أدق هو أنه مع أن كل ارتفاع متوسط $ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . تتعلق دقته بمهارة الرسام فان الخطآت تتعادل كثيرا أو قليلا بحيث يكون المتوسط المحسوب أدق من الناتج من المقاسات منفردة ولكن فى الطريقة البيانية التى فيها تجمع المتوسطات الجزئية المنفصلة لايجاد ص فانه لا يمكن تحقيق مقدارها الا بقياس ص نفسها والأضبط أن يحسب ص باعتباره متوسط جملة كميات مقيسة ولا يقاس مباشرة من الشكل

والشكل التالى يرى طريقة حساب شكل غير منتظم بواسطة متوسط الارتفاعات المتوسطة ($ص_١$ الى ص) لخمسة أجزاء متساوية العرض ويجب أن تقاس هذه الارتفاعات المتوسطة باعتناء وأن يقاس الطول ل أيضا من الشكل فى اتجاه عمودى عليها فيكون مقدار المساحة هو $= \frac{١}{٥}$ ل ($ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ص_٤ + ص_٥$) وفى تعيين نهايات الخطوط $ص_١$ الخ ينبغى أن يلاحظ أن الواقع فى هذا الشكل أن طريقة المماسات انما تكون مهمة فى $ص_١$ ، $ص_٥$ وأن هناك حالة لا يمكن تطبيقها فيها أى فى حالة تعيين نهاية $ص_٢$ وذلك لأن المنحنى من نقطة ب الى نقطة حـ يتركب

من جزأين متضادى اتجاه الانحناء بحيث يوجد مماسان فى هذا الجزء موازيان للوتر ب ح ففى مثل هذه الأحوال يجب استعمال طريقة سمبسون



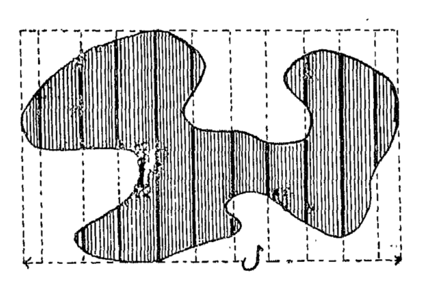
البسيطة وحدها أى من النقطة العليا تؤخذ على ثانى الارتفاع بين الوتر والمنحنى وفى الواقع متى وجد أى أثر لانقلاب الانحناء يكون الأحسن ترك طريقة المماسات ومثل هذه الحالة تحصل فى الجزء بين ءَ و حَ وفيها يجب استعمال طريقة سمبسون نفسها

٤٦ — تعيين المسائح غير المنتظمة بطريقة الرأسيات الواقعة فى الوسط

فى حالة ما تكون الأشكال غير منتظمة بالمرة فالغالب أن يكون الأحسن أن نقسمها الى أقسام كثيرة ويبحث عن القطاع الذى فى وسط كل واحد منها ويعتبر أنه القطاع المتوسط فالخطآت التى تدخل تتماحى كثيرا أو قليلا وفضلا عن ذلك فانها تصير صغيرة اذا كانت الأقسام ضيقة العرض ضيقا كافيا وينبغى أن يلاحظ فى الشكل الأخير أن الخطآت الناشئة عن قياس

الرأسيات $ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . . الى المنحنى بدلا من قياسها الى نقط الارتفاع الحقيق ليست خطآت مهمة الا فى الطرفين واننا لو أخذنا عشرة رأسيات من هذا القبيل بدلا من خمسة فان الخطآت النسبية تكون أقل بكثير

ثم ان أعظم خطأ يحصل هو فى الطرفين وربما كان من المفيد أخذ المتوسط الحقيقى للرأسيات فى هاتين الحالتين والعادة أن تؤخذ عشرة رأسيات وذلك أولا بسبب أخذ هذا العدد العظيم يتأكد من الدقة وأيضا لأن القسمة على ١٠ لايجاد المتوسط لاتحتاج الى أكثر من نقل العلامة الاعشارية وقد بينا هنا شكلا فيه الرأسيات الواقعة فى الوسط هى المقصود استعمالها وقد أخذت قريبة من بعضها جدّا فالرأسيات الواقعة فى وسط الأقسام مبينة فى الرسم ولم نبين حدود الأقسام نفسها واذا قطع رأسى واحد المساحة أكثر من مرة



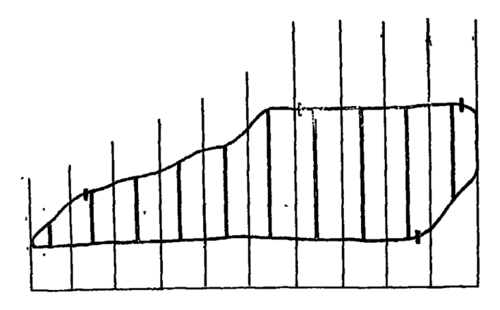
فالأجزاء المختلفة منه تضم الى بعضها وقد رسمنا عشرة رأسيات حتى يقسم مجموعها على ١٠ للحصول على المتوسط وهذا المتوسط يضرب فى الطول ل لأجل ايجاد المساحة

ويمكن امتحان النتيجة بتقسيم الشكل الى عشرة أقسام موازية الى ل ورسم أجزاء الخطوط الواقعة فى وسط تلك الأقسام والتى يشتمل عليها الشكل

وقياسها فعشر هـذا المجموع يكون هو الطول المتوسط الذى يلزم ضربه فى الارتفاع الأكبر للشكل لأجل الحصول على المساحة ومن الواضح أنه يمكن الحصول على دقة أعظم بتقسيم الشكل الى أكثر من عشرة أجزاء

وأسهل طريقة هى أن تقاس الأطوال على حرف شريط طويل من الورق وذلك ليكون مجموع الرأسيات العشرة الواقعة فى الوسط خطا واحدا فعشر هذا الطول الكلى هو المتوسط المطلوب

وهذه الطريقة وهى أخذ القطاعات الواقعة فى وسط عشرة أقسام جزئية تستعمل كثيرا فى حساب الارتفاع المتوسط للمنحنى البيانى لآلة بخارية وهاك مثالا لذلك



٤٧ — البلانيمتر

وفى العمل حينما تتكرر الحاجة لمعرفة المسائح لا تحسب أبدا بل يتحصل عليها باستعمال البلانيمتر أو آلة قياس المسطحات فالآلة الأولى اخترعها مهندس باڤارى فى سنة ١٨١٤ ومنها الآن جملة أنواع مستعملة وفى كلها تتبع الطريقة الآتية وهى أنه بعد تجهيز الجهاز كله تدار الابرة حول المنحنى المطلوب تعيين

مساحته ثم تقرأ المساحة على الجزء الخاص بالقراءة من الجهاز وفائدة هذه الآلة في نظر الطالب لعلم تقدير السطوح والأجسام اذا وجدت لديه أن يحقق بها ضبط النتائج التي يحصل عليها باحدى الطرق المشروحة في هذا الفصل وهي في هذا الغرض مفيدة جدًا

وعلى أي حال يستحسن أن الطالب يرسم جملة منحنيات بيانية ويحسب مسائحها بجملة من الطرق المتقدمة باستعمال طريقة لتحقيق ناتج الطريقة الأخرى وهاك بعض أمثلة

تمرينات (٦)

المطلوب رسم القطع الدائرية الآتية بمقياس رسم مناسب مع ايجاد مسائحها

(١) برسم منحن مؤسس على طريقة المماس (٢) بواسطة الرأسيات العشرة الواقعة في الوسط

(١) وتر القطعة ٤٠ مترا وسهمها ٨ أمتار

(٢) وتر القطعة ١٠ سنتيمترات وسهمها = ١٢ سنتيمترا

(٣) $ح_١$ = ٢٠ سنتيمترا ، $ح_٢$ = ١٢ «

(٤) $ح_١$ = ١٢ « ، $ح_٢$ = ٢٠ «

(٥) نصف قطر الدائرة يساوي ١٢ سنتيمترا ووتر القطعة ١٤ سنتيمترا (والمطلوب ايجاد مساحة كل قطعة في هذه الحالة وتحقيق ذلك بمقارنة المجموع بالمساحة المحسوبة للدائرة جميعها)

(٦) المطلوب رسم محيط مديرية على ورق شفاف نقلا عن خريطة ثم ايجاد مساحتها بطريقة الرأسيات الواقعة في الوسط مع استعمال مقياس الرسم المبين بأحد جوانب الخريطة

الفصل الثانى

سطوح الأجسام

٤٨ — ليس هناك طريقة عامة بها يمكن ايجاد مساحة السطح المنحنى لجسم مشابهة للقانون المنشورى الذى تعين بواسطته الأحجام الا أنه فى بعض الأحوال يمكن تعيين السطح بقسمته الى أجزاء مستوية بالضبط أو بالتقريب وفى الأحوال الأخرى يمكن تعيينه بواسطة معلومية الحجم

٤٩ — السطح المنحنى للاسطوانة

(١) اذا كان السطح محدودا بمستويين عموديين على المحور

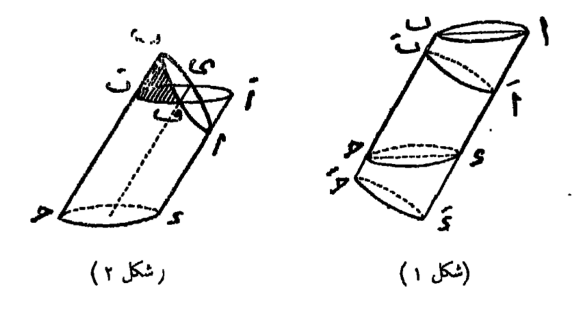
فيمكن أن يقسم السطح فى هذه الحالة الى مستطيلات ضيقة بخطوط موازية للمحور بحيث تكون مجموع قواعد المستطيلات مكونا لمحيط احدى قاعدتى الاسطوانة وارتفاع تلك المستطيلات يكون هو البعد بين القواعد أعنى طول المحور وحينئذ يكون السطح مساويا الى طول المحور فى محيط احدى القاعدتين

(٢) اذا كان السطح محدودا بمستويين متوازيين ليسا عموديين على المحور فاذا فرضنا أن جزءا قد قطع من احدى النهايتين بمستو عمودى على المحور ووضع فى النهاية الأخرى كما فى شكل (١) فاننا نرى أن السطح المنحنى يساوى طول المحور × محيط القطاع العمودى على المحور

(٣) واذا كان السطح محدودا بمستويين أيا كانا

فنرسم مستويا مارا بنقطة تقابل المحور باحدى القاعدتين وموازيا للقاعدة الأخرى ونفرض أن السطح الاسطوانى كمل حتى يقابل هذا المستوى الجديد بحيث يكون ا ب ، حـ ء هما قاعدتا الاسطوانة (شكل ٢) ، اَ بَ

هو المستوى المرسوم بالتوازى الى حـ ء ومار بنقطة تقابل المستوى ا ب بالمحور فمن الواضح حينئذ أن القطعتين المحصورتين بين المستويين ا ب ، اَ بَ متساويتان بسبب تماثلهما وأن السطح (والجسم أيضا) لا يتغيران اذا أديرت القطعة ب بَ الى الوضع ا اَ بحيث تكون



(شكل ٢) (شكل ١)

الاسطوانة المعلومة ا ب حـ ء مساوية فى السطح للاسطوانة اَ بَ حـ ء التى هى الاسطوانة المذكورة فى الفقرة (٢) المتقدمة

واذن ففى كل حال يكون —

سطح أى اسطوانة يساوى طول محورها مضروبا فى محيط القطاع العمودى على هذا المحور

٥٠ — السطح المنحنى لمخروط دائرى قائم

طول راسم أى مخروط يساوى $\sqrt{ا^2 + هـ^2}$ وفى هذا القانون هـ هو ارتفاع المخروط ، ا نصف قطر قاعدته فلنرمز لطول هذا الراسم بالحرف ل

فالسطح المنحنى يمكن أن يقسم الى عدد من المثلثات المتساوية الساقين الضيقة التى يكون مجموع قواعدها محيط القاعدة ورؤوسها جميعها متحدة مع رأس المخروط

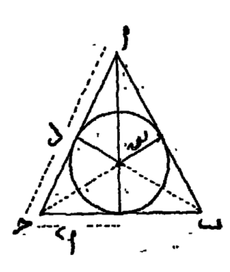
فمساحة كل مثلث من هذه المثلثات هى حاصل ضرب نصف قاعدته فى ارتفاعه واذن يكون مساحة السطح المنحنى مساوية لنصف مجموع القواعد مضروبا فى الارتفاع ل

أى أن السطح المنحنى = $\frac{1}{2}$ (٢ ط ا) ل = ط ا ل

ومحيط القطاع الذى فى نصف الارتفاع بين قاعدة المخروط ورأسه يساوى ط ا لأن نصف قطره = $\frac{1}{2}$ ا

واذن فالسطح المنحنى لمخروط يساوى طول الراسم مضروبا فى محيط القطاع المأخوذ فى وسط ارتفاعه

١٥ — ويمكن ايجاد السطح المنحنى لمخروط بعد معرفة حجمه بالطريقة الآتية



لنأخذ قطاعا مارا بمحور المخروط ا ى فهذا القطاع يكون مثلثا متساوى الساقين قاعدته ٢ ا وارتفاعه هـ

وليكن نق نصف قطر الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث فاذا أدير الشكل كله حول ا ى فانه يتكون مخروط داخله كرة نصف قطرها نق

ثم ان المخروط يمكن قسمته الى عدد من الأهرام الضيقة رؤوسها كلها في مركز الكرة التي رسمت داخلا وقواعدها على السطح المنحنى للمخروط أو على قاعدته المستوية

والارتفاع المشترك لجميع هذه الأهرام هو ىں وقواعدها مجتمعة تكوّن السطح المنحنى للمخروط المعلوم بما فيها سطح القاعدة المستوى ط ا^{٢}

واذن فحجم المخروط $= \frac{١}{٣}$ ىں (السطح المنحنى + ط ا^{٢})

وحينئذ اذا أمكن أن نعين نصف القطر ىں بدلالة الكميات ا ، هـ ، ل فانه يمكن أن نعين السطح المنحنى

وبما أن المثلثات الثلاثة و ب حـ ، و حـ ا ، و ا ب تكوّن باجتماعهما المثلث ا ب حـ

فيكون ىں (ا + $\frac{١}{٢}$ ل + $\frac{١}{٢}$ ل) = ا هـ

ومنه يكون ىں $= \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا + ل}}$

وحجم المخروط كله $= \frac{١}{٣}$ ط ا^{٢} هـ

واذن يكون $\frac{١}{٣}$ ط ا^{٢} هـ $= \frac{١}{٣} \cdot \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا + ل}}$ (السطح المنحنى + ط ا^{٢})

ويكون ط ا (ا + ل) = السطح المنحنى + ط ا^{٢}

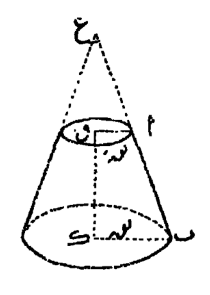
ومنه السطح المنحنى = ط ا ل كما تقدم

٥٢ — السطح المنحنى لمخروط ناقص

ان السطح المنحنى للمخروط كله = ط ىں × ب ع

والسطح المنحنى للمخروط الصغير = ط ىں َ × ا ع

فاذا كان ا ب = ل = راسم المخروط الناقص فمن تشابه المثلثات



يكون $\frac{\text{ع ب}}{\text{ع ا}} = \frac{\text{نق}}{\text{نق َ}}$

∴ $\frac{\text{ع ا} + \text{ل}}{\text{ع ا}} = \frac{\text{نق}}{\text{نق َ}}$

∴ $\frac{\text{ل}}{\text{ع ا}} = \frac{\text{نق} - \text{نق َ}}{\text{نق َ}}$

ومن هنا يكون

$$\text{ع ا} = \frac{\text{نق َ ل}}{\text{نق} - \text{نق َ}}$$

∴ $\text{ع ب} = \text{ل} + \frac{\text{نق َ ل}}{\text{نق} - \text{نق َ}} = \frac{\text{نق ل}}{\text{نق} - \text{نق َ}}$

ويكون السطح المنحنى للمخروط كله = $\frac{\text{ط نق}^{2}\text{ ل}}{\text{نق} - \text{نق َ}}$

والسطح المنحنى للمخروط الصغير = $\frac{\text{ط نق َ}^{2}\text{ ل}}{\text{نق} - \text{نق َ}}$

ومن ذلك يكون سطح المخروط الناقص = ط ل . $\frac{\text{نق}^{2} - \text{نق َ}^{2}}{\text{نق} - \text{نق َ}}$

= ط ل (نق + نق َ)

ومحيط القطاع الذى فى وسط ارتفاع المخروط الناقص أى فى وسط المسافة بين القاعدتين الدائرتين يساوى ط (نق + نق َ) لأن نصف قطره يساوى $\frac{1}{2}$ (نق + نق َ)

وعليه السطح المنحنى لمخروط ناقص يساوى طول راسم المخروط الناقص مضروبا فى محيط القطاع الذى فى وسط ارتفاعه

٣.٥ — السطح المنحنى للكرة

يمكن أن نحصل على السطح المنحنى للكرة من حجمها مباشرة بملاحظة

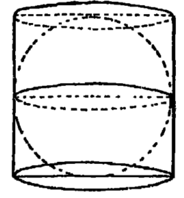
أن الجسم يمكن تكوينه من اهرامات ضيقة رؤوسها فى مركز الكرة وقواعدها معا تكوّن السطح المنحنى للكرة

وإذا يكون $\frac{1}{3}$ نق (السطح المنحنى) $= \frac{4}{3}$ ط نق^3

ويكون السطح المنحنى للكرة $= 4$ ط نق^2

$=$ مساحة أربع دوائر عظيمة من الكرة

وينبغى أن يلاحظ أن هذه المساحة تساوى مساحة السطح المنحنى لأسطوانة مرسومة على الكرة



وهذا يوافق ما هو معلوم من أن حجم الاسطوانة يزيد عن حجم الكرة بقدر نصفه (أنظر مسألة ٧ من تمرينات ١٦)

وذلك لأن الاسطوانة يمكن أن تتكوّن من أهرام ضيقة رؤوسها فى مركز الكرة ومجموع قواعدها تكوّن السطح الكلى للاسطوانة والارتفاع المشترك لجميع تلك الأهرام يساوى نق وإذن يكون الجسم مساويا الى $\frac{1}{3}$ نق $\times$ السطح الكلى

وإذن يكون $\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{السطح الكلى للاسطوانة}} = \frac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم الاسطوانة}} = \frac{2}{3}$

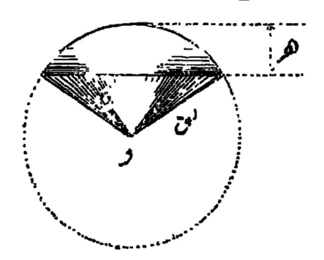
لكن السطح الكلى للاسطوانة $= 4$ ط نق$^2 + 2$ ط نق$^2 = 6$ ط نق^2

وإذن يكون سطح الكرة $= \frac{2}{3}$ (6 ط نق^2) $= 4$ ط نق^2

٥٤ — سطح القطعة الكروية

قد أثبتنا فى الفصل السابق أن حجم أى قطاع كروى قاعدته قطعة كروية ارتفاعها هـ يساوى $\frac{2}{3}$ ط نق^2 هـ بفرض أن نق هو نصف قطر الكرة

ثم ان هذا القطاع يمكن أن يعتبر مكونا من عدد عظيم من الأهرام الضيقة التى قواعدها على السطح المنحنى للقطعة وجميع رؤوسها فى مركز الكرة



فارتفاع كل من هذه الأهرام الصغيرة يساوى ىق ومجموع قواعدها يكون السطح المنحنى للقطعة واذن يكون مجموع الأحجام مساويا الى $\frac{1}{3}$ ىق × السطح المنحنى للقطعة

ومنه $\frac{1}{3}$ ىق × السطح المنحنى للقطعة = $\frac{2}{3}$ ط ىق^2 هـ

فيكون السطح المنحنى للقطعة = ٢ ط ىق هـ

أى ان السطح المنحنى للقطعة الكروية يساوى محيط دائرة عظيمة من الكرة مضروبا فى ارتفاع القطعة أو يساوى السطح المنحنى للاسطوانة التى ارتفاعها نفس ارتفاع القطعة ونصف قطر قاعدتها يساوى نصف قطر الكرة

٥٥ — وبما أن ا^2 + هـ^2 = ٢ ىق هـ ، ا هو نصف قطر قاعدة القطعة الكروية فسطح القطعة يمكن أن يبين بدلالة ا ، هـ بالمقدار الآتى

سطح القطعة = ط (ا^2 + هـ^2)

ويمكن التحقق من صحة هذه النتيجة بملاحظة (١) أنه فى حالة الكرة التامة يكون ا = ٠ ، هـ = ٢ ىق (٢) وفى حالة نصف كرة يكون ا = هـ = ىق وينبغى أن يلاحظ أيضا أنه اذا كان هـ = ٠ وكان ا مخالفا للصفر وهو الأمر الذى لايحصل الا اذا كان ىق = ∞ أى حينما يؤول سطح الكرة

الى مستو فالمقـدار الذى يحدد سطح القطعة الكروية يؤول الى سطح دائرة نصف قطرها م

٥٦ — سطح القطعة الكروية الناقصة

حيث ان القطعة الكروية الناقصة هى الفرق بين قطعتين كرويتين فسطحها يساوى محيط دائرة عظيمة من الكرة مضروبا فى الفرق بين ارتفاعى القطعتين أى مضروبا فى ارتفاع القطعة الكروية الناقصة

فاذا كان هـ هو ارتفاع القطعة الكروية الناقصـة فيكون سطحها المنحنى = ٢ ط نق هـ

أى أن السطح المنحنى لقطعة كروية ناقصـة يساوى محيط دائرة عظيمة من الكرة مضروبا فى ارتفاع القطعة الناقصة أو يساوى السطح المنحنى لأسطوانة متحدة معها فى الارتفاع ونصف قطر قاعدتها يساوى نصف قطر الكرة

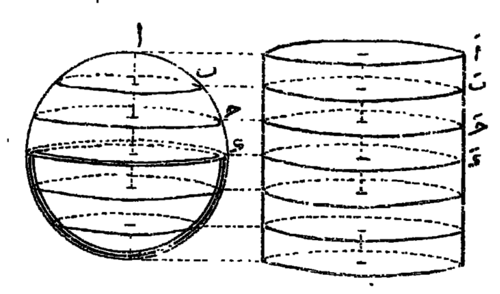
واذا وضعنا هـ = ٢ نق فانه يحصل على السطح الكلى للكرة = ٤ ط نق٢

٥٧ — وبما أن سطح قطعة كروية ناقصة يساوى سطح أسـطوانة متحدة معها فى الارتفـاع وقطرها مسـاو لقطر الكرة فينتج من ذلك أنه اذا قطعت الكرة بعدد من القطاعات المتساوية التباعد بحيث تقسم الكرة الى جملة قطع ناقصة متساوية الارتفاع فان أسطح هذه القطع الناقصة تكون متساوية ومساوية لاسـطح قطع من الاسـطوانة المذكورة اذا رسمت محيطة بالكرة وكانت القطاعات عمودية على محور الأسطوانة وقد بينا فى الرسم الاسـطوانة مجاورة للكرة

واذا أشكل فهم تساوى تلك السـطوح فيجب أن نلاحظ أن المنـاطق ذات القواعد الصغيرة سطوحها مائلة ميلا عظيما وأن هذه الزيادة فى العرض

للمناطق الصغيرة تعوّض نقص محيطها فمثلا ا ب أكبر من ب حـ ، ب حـ أكبر من حـ ى

ويتبغى أن يقرأ ما يأتى فى بند ١١٧ حيث يتبين أنه اذا كانت الكرة مجوّفة وكان التجويف عبارة عن كرة متحدة مع الكرة الأولى فى المركز فان القطع الكروية الناقصة الناشئة عن مستويات متوازية وعلى أبعاد متساوية وقاطعة لكل من الكرة والتجويف تكون متساوية فى الحجم ويمكن استنباط



تساوى السطوح من هذا لأن تلك القطع المجوّفة جميعها متساوية فى السمك المقاس فى اتجاه عمودى على الأسطح واذن اذا اعتبرنا أنها ضيقة جدّا بحيث يكون السطح الداخل مساويا تقريبا للسطح الخارج فسطح تلك القطع يلزم أن يكون واحدا وذلك لأن حجم كل منها يساوى السطح مضروبا فى السمك

٥٨ — ومقدار السطح المنحنى بدلالة هـ ، ا ، ب لقطعة كروية ناقصة ارتفاعها هـ ونصف قطر قاعدتيها الدائرتين هما ا ، ب يمكن استخراجه من المقدار ٢ ط ىں هـ

لأن ٤ هـ^٢ ىں^٢ = هـ^٤ + ٢ هـ^٢ (ا^٢ + ب^٢) + (ا^٢ — ب^٢)^٢ بموجب معادلتى ٤ ، ٥ (بند ٩٧)

واذن يكون السطح المنحنى للقطعة الكروية الناقصة

$$= ط \sqrt{هـ^{٤} + ٢ هـ^{٢} (ا^{٢} + ب^{٢}) + (ا^{٢} - ب^{٢})^{٢}}$$

ويمكن تحقيق ذلك بأن يوضع

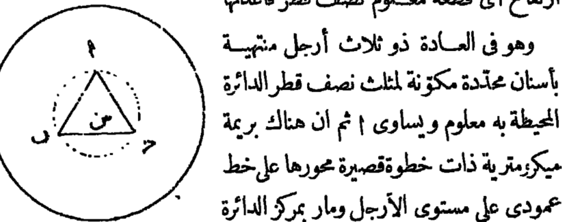
(١) هـ = ٠ وهذا يصير القطعة الكروية الناقصة حلقة مستوية دائرية أنصاف أقطارها الداخلة والخارجة ا ، ب ويحول مقدار المساحة الى ط $(ا^{٢} - ب^{٢})$ ،

(٢) ب = ٠ وهذا يصير القطعة الكروية الناقصة قطعة كروية تامة ويؤول مقدار السطح الى ط $(هـ^{٢} + ا^{٢})$

وينبغى أن يلاحظ أن المقدار الموضوع تحت علامة الجذر يتركب كله من قوى زوجية لكل من ا ، ب ، هـ وأن هذه هى الدالة الوحيدة ذات الدرجة الرابعة المتماثلة بالنسبة لكل من ا ، ب وهى التى تحقق الشروط (١) و (٢) أى التى تؤول الى ط $(ا^{٢} - ب^{٢})$ حينما يكون هـ = ٠ وتؤول الى ط $(هـ^{٢} + ا^{٢})$ حينما يكون ب = ٠

٥٩ — المقياس الكروى

المقياس الكروى هو آلة تستعمل لتعيين نصف قطر أى كرة بقياس ارتفاع أى قطعة معلوم نصف قطر قاعدتها



وهو فى العادة ذو ثلاث أرجل منتهية بأسنان محددة مكونة لمثلث نصف قطر الدائرة المحيطة به معلوم ويساوى ا ثم ان هناك بريمة ميكرومترية ذات خطوة قصيرة محورها على خط عمودى على مستوى الأرجل ومار بمركز الدائرة

المحيطة بالمثلث وهذه البريمة يمكن أن تحرك الى أعلى أو أسفل حسب درجات معينة على كل من جانبي مستوى الأرجل وهى مدرجة بحيث ان المسافة التى تتحرك بها فى اتجاه المحور يمكن أن تقرأ فيبدأ بوضع الآلة على السطح المستوى ثم تحكم البريمة حتى ان نقطتها تمس السطح تماما وبعد ذلك توضع على السطح الكروى المطلوب تعيين نصف قطره بحيث ترتكز أرجله الثلاثة على دائرة صغيرة من الكرة نصف قطرها ا وتدار البريمة الى أن تمس السطح بالضبط فقراءة البريمة تعطى فى هذه الحالة الارتفاع (هـ) للقطعة الكروية التى قاعدتها تلك الدائرة الصغيرة وحينئذ فنصف قطر الكرة ىو يحسب من القانون ٢ ىو هـ = ا^{٢} + هـ^{٢}

وفى الشكل تكون ا ، ب ، حـ هى أرجل الآلة ، س هى نقطة وضع البريمة

تمرينات (٧)

(١) عدد من الكرات رسم بحيث تكون أسطحها جميعا مارة بنقطة و والمطلوب بيان أن جميع قطع هذه الكرات الناشئة عن تقاطعها بكرة مركزها و تكون جميعها متساوية فى المساحة أى تساوى مساحة الدائرة العظيمة لهذه الكرة الأخيرة

(٢) اذا رسمت كرتان متحدتا المركز و فالمطلوب بيان أن المناطق الناشئة من تقاطع تلك الكرات (المذكورة فى المسألة السابقة) المحصورة بين سطوح هاتين الكرتين المتحدتى المركز جميعها متساوية

(٣) المطلوب بيان أن مساحة السطح المنحنى من قطعة كروية يزيد عن مساحة قاعدتها بمساحة دائرة نصف قطرها مساو لارتفاع القطعة

(٤) اذا كانت أرجل المقياس الكروى محيطة بمثلث متساوى الأضلاع كل ضلع من أضلاعه = ب فالمطلوب اثبات أن نصف قطر الكرة يمكن أن يعين بالقانون

$$٢ ى = \frac{ب^٢}{٣ هـ} + هـ$$

(٥) المطلوب ايجاد نصف قطر كرة ممكن رسمها حول هرم منتظم ارتفاعه هـ وقاعدته مثلث متساوى الأضلاع طول كل منها ب

(٦) ارتفاع قطعة كروية يساوى ١,٢٧٥ سنتيمتر ونصف قطر قاعدتها ١,٢٥ سنتيمتر والمطلوب ايجاد نصف قطر الكرة

(٧) المطلوب ايجاد مساحة السطح المنحنى لتلك القطعة

(٨) ارتفاع قطعة كروية ناقصة ٣ أمتار ونصفا قطرى قاعدتيها هما ٤ أمتار ، ٥ أمتار على التناظر والمطلوب ايجاد مساحة سطحها المنحنى ونصف قطر الكرة

(٩) ارتفاع مخروط ناقص ٣ أمتار ونصفا قطرى قاعدتيه هما ٤ أمتار ، ٥ أمتار على التناظر والمطلوب ايجاد مساحة سطحه المنحنى

(١٠) المطلوب ايجاد بعد رأس المخروط التام عن القطاع الواقع فى وسط المخروط الناقص المذكور فى المسألة السابقة

(١١) اذا رسم هرم ثلاثى منتظم (أى أن كل وجه من أوجهه مثلث متساوى الأضلاع) داخل كرة فالمطلوب اثبات أن ارتفاعه يساوى $\frac{٤}{٣}$ نصف قطر الكرة

(١٢) اذا رسمت كرة داخل هرم ثلاثى منتظم فالمطلوب اثبات أن نصف قطرها يساوى ربع ارتفاع الهرم

(١٣) المطلوب ايجاد سطح هرم ثلاثى منتظم مرسوم حول كرة نصف قطرها نق وايجاد حجمه أيضا

(١٤) اذا ثقب ثقب اسطوانى نصف قطره ٦ سنتيمترات فى كرة نصف قطرها ١٢ سنتيمترا بحيث يمر بمركز الكرة فما مساحة السطح الكلى لهذا الجسم

(١٥) اذا ثقب ثقب اسطوانى نصف قطره ا فى كرة نصف قطرها نق بحيث يمر بمركز الكرة فما المساحة السطحية للجسم

٦٠ — سطح الجسم الحلقى

ليكن نق نصف قطر القطاع العرضى المستدير وليكن ب نصف القطر المتوسط للحلقة كما فى بند ١٢٠

فاذا نظرنا للشكل المرسوم فى ذلك البند ورسم المستويان المساران بنقطتى ن ، نَ قريبين جدّا من بعضهما فان مجموع الشقق العليا والسفلى التى يرسمها كل من الخطين ن نَ ، ك كَ يكون مساويا الى

ن نَ × ٢ ط م ن + ك كَ × ٢ ط م ك

= ٢ ط ن نَ (م ن + م ك)

= ط (ن نَ + ك كَ) (م ن + م ك)

[وذلك لأن ك كَ = ن نَ]

= ٢ ط ب (ن نَ + ك كَ)

لأن م ن + م ك = ٢ ب

ومن هنا يكون السطح الكلى للحلقة مساويا الى ٢ ط ب × محيط دائرة القطاع العرضى المستدير أى يساوى ٢ ط ب × ٢ ط نق = ٤ ط^{٢} نق ب

وينتج من ذلك أن سطح الحلقة يساوى سطح الاسطوانة المتحدة معها فى القطاع العرضى والتى ارتفاعها = ٢ ط ب

أو سطح الحلقة يساوى المحيط (٢ ط نق) لقطاعها العرضى المستدير مضروبا فى طول المسار (٢ ط ب) المقطوع بمركز تلك الدائرة

٦١ — والنظرية العامة التى من أمثلتها سطح الحلقة هى

اذا دار أى شكل مستو حول محور خارج عنه الا أنه فى مستويه فسطح الجسم المتولد بهذه الكيفية يساوى محيط الشكل مضروبا فى المسار المقطوع بنقطة معينة فى الشكل وتسمى «مركز المحيط» أو «مركز القوس»

[وفى الحلقة يكون مركز الدائرة المتحركة هو مركز محيطها واذن ففى هذه الحالة تكون تلك النقطة هى «مركز المساحة» و «مركز المحيط»

(أنظر بند ١٢١) ولكن ذلك لا يكون عاما فى كل حال]

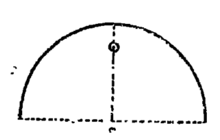
وهذه النظرية هى والنظرية المقابلة لها المتعلقة بحجم الأجسام المشابهة لما ذكر (بند ١٢١) يظهر أنهما كان قد اكتشفهما فى أول الأمر بابوس الرياضى الاسكندرى الشهير حوالى آخر القرن الرابع ثم نسيا الى القرن السابع عشر حينما وجدهما الرياضى الجزويتى المسمى جولدينوس فى سنة ١٦٤٠ ميلادية ونسبهما لنفسه بدون أن يعترف بأصلهما

وقد أقام الدليل على هاتين النظريتين كاڤالليرى أستاذ الرياضيات فى بولونيا وقتئذ الذى كان أيضا من الجزويت وهاتان النظريتان معروفتان باسم نظريتى بابوس الا أنه قد أطلق عليهما اسم نظريتى جولدينوس زمنا طويلا .

سنسلم فيما سيأتى بصحة النظرية العامة المذكورة فيما يختص بالسطوح الدورانية

٦٢ — ايجاد مركز محيط قوس نصف دائرة

اذا دار نصف الدائرة حول قاعدته فان القوس يرسم سطحا كرويا



فاذا فرضنا أن نق نصف قطر نصف الدائرة وان س هو بعد مركز قوسها عن القاعدة فبناء على النظرية :

ط نق × ٢ ط س = سطح الكرة

= ٤ ط نق^{٢}

وتكون س = $\frac{٢ نق}{ط}$ = $\frac{٧}{١١}$ نق (تقريبا جدا)

٦٣ — المطلوب ايجاد سطح كل من جزأى الحلقة الدائرية المتولدين من نصفى المحيطين الداخل والخارج للدائرة الراسمة .

إذا أخذ الجزء الخارج فانه يساوى طول نصف محيط الدائرة مضروبا فى طول مساو مركز المساحة

= ط ا × ٢ ط (ب + $\frac{٢ ا}{ط}$) = ٢ ط^{٢} ا ب + ٤ ط ا^{٢}

وبمثل ذلك يكون الجزء الداخل مساويا الى ٢ ط^{٢} ا ب — ٤ ط ا^{٢}

ومن هنا يعلم أن السطح المتولد من نصف الدائرة الخارج يزيد عن نصف السطح الكلى بقدر سطح الكرة التى نصف قطرها يساوى نصف قطر الدائرة الراسمة للحلقة والجزء الداخلى من السطح ينقص عن ذلك النصف بالمقدار نفسه

٦٤ — ايجاد السطح المنحنى لمخروط ناقص بواسطة نظرية بابوس

لنفرض أن المخروط الناقص حادث من دوران خط ع ع الذى هو راسم المخروط الناقص وطوله ل حول محور س ص فى مستويه

وليكن ا ، ب هما بعد نهايتى الخط المذكور ع ع عن المحور بحيث يكون ا ، ب هما نصفا قطرى قاعدتى المخروط الناقص

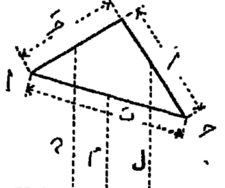
فمن الواضح أن مركز الخط ع ع هو نقطة منتصفه وبعد تلك النقطة عن المحور يساوى ½ (ا + ب) واذن فيكون بمقتضى نظرية بابوس

سطح المخروط الناقص = ط (ا + ب) ل

أى ان نظرية بابوس تعطى من أول الأمر مقدار السطح مساويا لطول الراسم مضروبا فى طول المسار الذى تقطعه نقطة وسطه

وينبغى للطالب أن يمتحن الحالة التى يكون فيها الخط ع ع موازيا لمحور الدوران أو عموديا عليه

٦٥ — المطلوب ايجاد السطح المنحنى لجسم متولد من دوران مثلث حول محور خارجى موجود فى مستويه



لنفرض أن ا ، ب ، حـ هى أطوال الأضلاع ، ل ، م ، ن هى أبعاد نقط منتصفاتها عن المحور

فالسطح = ٢ ط (اَ ل + بَ م + حَ ن)

تمرينات (٨)

(١) المطلوب ايجاد مساحة سطح حلقة قطراها الخارج والداخل هما ٦ سنتيمترات و ٤ سنتيمترات على التناظر

(٢) المطلوب ايجاد السطح اذا كان القطر الداخلى يساوى صفرا والقطر الخارجى يساوى ٦ سنتيمترات

(٣) المطلوب ايجاد مساحة أرضية خندق قطاعه العرضى نصف دائرة قطرها ١٠ أمتار وهذا الخندق يحيط بقلعة مستديرة وطول أعرض مسافة فيها ٥٠ مترا

(٤) المطلوب ايجاد مساحة خندق أبعاده كما سبق وقطاعه العرضى على شكل V وعمق الخندق ٤ أمتار

(٥) المطلوب ايجاد مقدار الماء اللازم لملء أحد الخندقين السابق ذكرهما (١) ملأ تاما (٢) الى نصف ارتفاعه

(٦) جسم متولد من دوران مربع مرسوم عليه نصف دائرة قطرها يتحد مع أحد أضلاع المربع والدوران حاصل حول الضلع المقابل من المربع وطول ضلع المربع وقطر نصف الدائرة يساوى ٦ سنتيمترات والمطلوب ايجاد حجم الجسم وسطحه

(٧) المطلوب ايجاد حجم جسم متولد من دوران مربع حول أحد أضلاعه اذا قطع من هذا المربع نصف دائرة قطرها أبعد ضلع عن محور الدوران وايجاد سطح هذا الجسم أيضا مع فرض أن ضلع المربع يساوى ١

الفصـــل الثـالث

الشقق والمثلثات والمضاعات وكثيرات السطوح الكروية

٦٦ — سنتكلم فى هذا الفصل على أجزاء السطوح التى يمكن أن تنقسم اليها الكرة بالدوائر العظيمة أى بالدوائر التى تمر مستوياتها بمركز الكرة

فالشقة الكروية هى جزء من سطح الكرة محصور بين قوسى دائرتين عظيمتين وكل قوس منهما بالضرورة نصف دائرة والزاوية بين الدائرتين العظيمتين تسمى زاوية الشقة الكروية ففى الشكل المرسوم فى بند ٦٧ يكون كل من الشكلين ا ب اَ حـ ، ا بَ اَ حَ شقة كروية وكذلك يكون كل من ا ب اَ حَ ، ا بَ اَ حـ شقة كروية

والمثلث الكروى هو جزء من السطح محدّد بثلاثة أقواس من دوائر عظيمة وزوايا الشكل (ا ، ب ، حـ) المحصورة بين الأقواس تسمى زوايا المثلث وهى مساوية للزوايا الواقعة بين مستويات الدوائر العظمى

ومثل ذلك المربعات الكروية والمخمسات الكروية ... فهى أجزاء من السطح محصورة بين أربعة أقواس أو خمسة ... من دوائر عظيمة والأقواس المحددة للشكل تسمى أضلاعه

وتقاس أطوال تلك الأقواس بدلالة الزوايا التى تقابلها فى مركز الكرة والطول الحقيق لأى قوس هو التقدير الدائرى للزاوية المقابلة له مضروبا فى نصف قطر الكرة

ومسائح الأشكال المختلفة تساوى مربع نصف القطر مضروبا فى بعض دوال متعلقة بالزوايا الواقعة بين الدوائر العظيمة أو الزوايا المركزية المقابلة للأضلاع

فاذا كانت الزوايا معلومة بالدرج وأجزاء الدرجة ثم أريد تحويلها الى التقدير الدائرى فيلزم استعمال المضروب $\frac{ط}{١٨٠}$ وذلك لأن ط هو التقدير الدائرى للزاوية التى مقدارها ١٨٠°

والمقدار التقريبي الموافق للاستعمال هو $\frac{٧}{٤٠٠}$ الا أنه أكبر من الحقيقة بقدر $\frac{١}{٤}$ فى المائة فهاك مقدار أضبط من السابق وهو $\frac{٧}{٤٠٠}(١ - \frac{١}{٤٠٠})$

نصف الكرة المرئى — فى رسم الأشكال الكروية يفرض أن مستوى الورق يقسم الكرة الى نصفين بحيث يكون القطاع المار بمستوى الورق دائرة عظيمة من الكرة والجزء من الكرة الواقع فوق هذا القطاع يسمى نصف الكرة المرئى

٦٧ — مساحة الشقة الكروية

مساحة الشقة الكروية من أى كرة $= ٢ نق^٢ هـ$ وفى هذا المقدار هـ هو التقدير الدائرى لزاوية الشقة الكروية

وذلك لأن نسبة مساحة الشقة الكروية الى مساحة الكرة كلها كنسبة زاوية الشقة الكروية الى أربع زوايا قائمة

أى ان $\frac{\text{مساحة الشقة الكروية}}{\text{مساحة الكرة}} = \frac{هـ}{٢ ط}$

واذن يكون مساحة الشقة الكروية $= \frac{هـ}{٢ ط}(٤ ط نق^٢) = ٢ نق^٢ هـ$

فاذا كانت زاوية هـ تساوى $\frac{١}{م}$ من أربع زوايا قائمة وكان مقدار م عددا صحيحا فعدد من مثل هذه الشقة الكروية قدره م يتكوّن عنه جميع السطح الكروى

أى أنه اذا كان زاوية الشقة الكروية = $\frac{٢ط}{م}$

تكون مساحة الشقة الكروية $\frac{٤ط س^٢}{م}$

فاذا وضعنا م = ٢ فاننا نحصل على الشقة الكروية التى زاويتها تساوى ط أى التى هى نصف كرة

٦٨ — فاذا رسمت الدوائر العظيمة التامة المشتملة على الشقة الكروية فان مساحة الشقة الكروية تساوى مجموع مساحتى الجزأين المثلثين اللذين فى نصف الكرة المرئى لأننا اذا نظرنا للشقة الكروية ا ب اَ حـ فمن الواضح أن الجزء الواقع تحت مستوى الورق يساوى مساحة ا بَ حَ وحينئذ فتكون مساحة الشقة الكروية مساوية لمجموع مساحتى المثلثين ا ب حـ و ا بَ حَ

ومساحة هذا الجزء المرئى من السطح المساوى لمساحة الشقة الكروية يمكن أن تعتبر أنها قد محيت بالجزء المنظور من دائرة عظيمة تتحرك حول المحور ا اَ من الوضع ب ا بَ الى الوضع حـ ا حَ مع ملاحظة أن الجزء المنظور من الدائرة يساوى نصف دائرة على الدوام الا أنه ليس على الدوام نصف الدائرة نفسه الا اذا اقترن الدوران حول ا بانزلاقها داخل ا فالمقصود من لفظ الجزء المنظور من الدائرة العظيمة الجزء الذى يكون منظورا من وقت الى آخر سواء كان الأمر كذلك فى الأوقات السابقة أم لا

٦٩ — مساحة المثلث الكروى

يمكن تعيين مساحة المثلث الكروى بدلالة الشقق الكروية التى زواياها هى نفس زوايا المثلث الكروى

وذلك لاننا اذا أخذنا أى مثلث كالمثلث ا ب حـ الموضوع بحيث تكون الدائرة العظيمة التى ب حـ جزء منها موجودة فى مستوى الورق وأخذنا الأجزاء المكافئة المرئية للشقق الثلاث فان الشقة التى زاويتها ا (أى الجزء المظلل بالشكل السابق) + الشقة التى زاويتها ب + الشقة التى زاويتها حـ فان ذلك يغطى المثلث ا ب حـ ثلاث مرات ويغطى الباقى من نصف الكرة المنظور مرة بحيث ان مجموعها يساوى نصف الكرة التام + ضعف مساحة المثلث

∴ ضعف مساحة المثلث = مجموع ثلاث شقق — سطح نصف الكرة

= ٢ نق^٢ (ا + ب + حـ) — ٢ ط نق^٢

أى أن مساحة المثلث = (ا + ب + حـ — ط) نق^٢

وفى هذا القانون مفروض أن ا ، ب ، حـ تقاس بالتقدير الدائرى فاذا قدرت بالدرج فان القانون يكون

$$\frac{ط}{١٨٠}(ا + ب + حـ - ١٨٠)\,نق^{٢}$$

أو يساوى بالتقريب

$$\frac{٧}{٤٠٠}(ا + ب + حـ - ١٨٠)\,نق^{٢}$$

ويرى من هذا القانون أن مجموع زوايا أى مثلث كروى يلزم أن يكون أكبر من زاويتين قائمتين وأنه كلما كانت هذه الزيادة أكبر كانت مساحة المثلث أكبر وزيادة مجموع هذه الزوايا عن زاويتين قائمتين تسمى الزيادة الكروية للمثلث

فاذا كان مقدار كل زاوية = ١٨٠° فان المثلث يؤول الى نصف سطح الكرة وتؤول رؤوس زوايا المثلث الى ثلاث نقط على الدائرة المحددة لنصف الكرة

وكذلك يكون الأمر في كثير الأضلاع الكروي فاذا كانت كل من زواياه = ١٨٠° فان المضلع يؤول الى نصف كرة ولا تكون رؤوسه سوى نقط على الدائرة المحددة لنصف الكرة

٧٠ — المثلث الكروي المتساوي الأضلاع

اذا كانت زوايا المثلث جميعها متساوية وكل زاوية منها تساوي $\frac{١}{م}$ من أربعة زوايا قائمة أي اذا كان ا = ب = ح = $\frac{٢}{م}$ط فان مساحة المثلث = ط ($\frac{٦}{م}$ — ١) نق^{٢} ومن المفيد أن نلاحظ الأحوال المختلفة التي فيها يكون م عددا صحيحا ولا يمكن أن يزيد هذا العدد عن ٦ لأنه في هذه الحالة يكون $\frac{٦}{م}$ — ١ سالبا

ولكن اذا كان م = ٦ فان المساحة تنعدم (بالنسبة لمقدار نق^{٢}) وكل زاوية تساوي في هذه الحالة ٦٠° وفي جميع الأحوال الأخرى يجب أن تزيد كل من الزوايا المتساوية عن ٦٠° وفي المثلثات الصغيرة جدا أو في المثلثات المعتدلة المقدار ولكنها على كرات عظيمة جدا لاتزيد الزوايا كثيرا عن ٦٠° للواحدة أي لايزيد المجموع كثيرا عن ١٨٠° وفي الكرات ذات نصف القطر غير المتناهي تؤول المثلثات الى مثلثات مستوية ويكون مجموع زواياها ١٨٠° مهما كان مقدار تلك المثلثات (بفرض أنها محدودة)

واذا كان م = ٥ فكل زاوية تساوي ٧٢° وتكون مساحة المثلث مساوية الى $\frac{١}{٥}$ ط نق^{٢} أو $\frac{١}{٢٠}$ من مساحة الكرة كلها

واذا كان م = ٤ فكل زاوية تكون قائمة وتؤول المساحة الى $\frac{١}{٢}$ ط نق^{٢} أو $\frac{١}{٨}$ مساحة الكرة كلها

واذا كان م = ٣ فكل زاوية تساوي ١٢٠° وتكون المساحة هي ربع الكرة كلها

واذا كان م = ٢ فكل زاوية تساوى ١٨٠° ويكون المثلث نصف الكرة كما تقدم

واذا كان م أكبر من واحد وأصغر من اثنين فان الزوايا تكون متداخلة أى كل منها أكبر من ١٨٠° ويكون المثلث أكبر من نصف الكرة

وأصغر مقدار ممكن للكمية م هو $\frac{1}{5}$ ١ لأنه فى هذه الحالة تكون المساحة ٤ ط نق^{2} ويكون المثلث مغطيا للكرة بتمامها وكل زاوية تكون فى هذه الحالة ٣٠٠°

وينبغى للطالب أن يجتهد فى رسم جميع هذه الصور المختلفة للمثلثات الكروية المتساوية الأضلاع على الكرة ويكفى أن تؤخذ لذلك كرة من كرات اللعب الصغيرة وفى أثناء عملية الرسم يجد الطالب صعوبة فى تحديد أطوال الأقواس المكوّنة لأضلاع المثلثات المختلفة فاذا اعتنى الطالب فانه يستطيع أن يرسم المثلثات المرغوبة بالتقريب الا أنه اذا أريد الضبط فمن الضرورى وجود الارتباط بين الأضلاع والزوايا

ومن علم حساب المثلثات الكروية يمكن اثبات أنه اذا كانت الزاوية المركزية المقابلة لأحد الأضلاع المتساوية تساوى اَ وزاوية المثلث المقابلة لذلك الضلع هى ا فانه يكون

٢ جتا $\frac{1}{2}$ ا جا $\frac{1}{2}$ ا = ١

فاذا كان ا = $\frac{٢ ط}{م}$

فانه يكون جتا $\frac{1}{2}$ اَ = $\frac{1}{2}$ قتا $\frac{ط}{م}$ (أنظر بند ٧٨)

تمرينات (٩)

(١) اذا كانت زوايا مثلث كروى هى على التناظر ١٣٠° ، ١٠٠° ، ٣٠° ونصف قطر الكرة ١٠ أمتار فالمطلوب ايجاد مساحة المثلث باستعمال المقدار التقريبى $\frac{ط}{١٨٠} = \frac{٧}{٤٠٠} = \frac{١}{٦٠} + \frac{١}{٢٠} \times \frac{١}{٦٠}$

(٢) المطلوب تصحيح الجواب السابق بأن يطرح منه $\frac{١}{٤}$ فى المائة ومقارنة الناتج الذى يوجد بما ينتج بأخذ $\frac{ط}{١٨٠} = \frac{٣٫١٤١٦}{١٨٠} = \frac{١٫٠٤٧٢}{٦٠}$

(٣) اذا كانت كل زاوية من زوايا المثلث الكروى ١٥′ ٧٥° ونصف قطر الكرة ١٠ أمتار فالمطلوب ايجاد مساحة المثلث

(٤) اذا كانت مساحة المثلث تساوى $\frac{١}{١٠}$ مساحة الكرة كلها فالمطلوب ايجاد مجموع زواياه بالدرج

(٥) اذا كانت كل زاوية من زوايا المثلث ٢٢٠° وجميع سطح الكرة ١٠٠٠ متر مربع فالمطلوب ايجاد مساحة المثلث

(٦) اذا كانت زوايا المثلث هى ا ، ب ، حـ وزوايا مثلث آخر هى ٣٦٠° — ا ، ٣٦٠° — ب ، ٣٦٠° — حـ فالمطلوب اثبات أن المثلثين معا يكوّنان سطح الكرة

(٧) اذا كانت زوايا مثلث مكملة لزوايا مثلث آخر فالمطلوب ايجاد مجموع المساحتين

(٨) المطلوب اثبات أن مجموع الزوايا الثلاث الخارجة عن مثلث كروى أقل من أربع زوايا قائمة

(٩) المطلوب اثبات أن مساحة المثلث الكروى أقل من نصف الكرة بمساحة شقة زاويتها نصف مجموع الزوايا الخارجة من المثلث مع امتحان الحالات التى يكون فيها مجموع الزوايا الداخلة أكبر من ٥٤٠°

(١٠) المطلوب ايجاد ضلع مثلث كروى متساوى الأضلاع كل زاوية من زواياه ٢٤٠°

(١١) المطلوب ايجاد طول ضلع مثلث مستو متكوّن بتوصيل رؤوس المثلث الكروى فى المسألة السابقة بفرض نصف قطر الكرة يساوى مترا واحدا

(١٢) المطلوب ايجاد أضلاع مثلثات كروية متساوية الأضلاع زواياها هى $\frac{٢ ط}{م}$ بفرض أن م = ٣ ، ٤ ، ٥

(١٣) المطلوب رسم هذه المثلثات على سطح الكرة (كرة اللعب) مع تعيين الأطوال الحقيقية للأقواس بأن يرسم على الورق دائرة قطرها يساوى قطر الكرة ثم وضع الزوايا السابق ذكرها فى المركز وطول الأوتار يعين الأبعاد الحقيقية التى يجب أن تنقل الى الكرة بواسطة البرجل

٧١ — مساحة المضلع الكروى

يمكن حساب مساحة المضلع الكروى بواسطة مساحة المثلث بتوصيل جميع رؤوس المضلع الى نقطة على سطح الكرة داخل المضلع لتقسيمه الى مثلثات عددها كعدد أضلاع الشكل

فاذا فرض أن عدد أضلاع الشكل هو ى

فمساحة أى مثلث = (مجموع زواياه الداخلة — ط) $س^٢$

واذن تكون مساحة المضلع = (مجموع زوايا المثلثات — ى ط) $س^٢$

ولكن جميع زوايا المثلثات = الزوايا الداخلة للمضلع + الزوايا المشتركة الرأس (المساوية الى ٢ ط)

واذن تكون مساحة المضلع = (مجموع زواياه الداخلة + ٢ط — دط) س٢

وهــذا المقدار يمكن اختصاره بأن يقدر بدلالة الزوايا الخارجة للمضلع لأن كل زاوية داخلة = ط — الزاوية الخارجة المجاورة لها واذن يكون مجموع الزوايا الداخلة = د ط — مجموع الزوايا الخارجة واذن تكون

مساحة المضلع = (٢ ط — مجموع الزوايا الخارجة) س٢

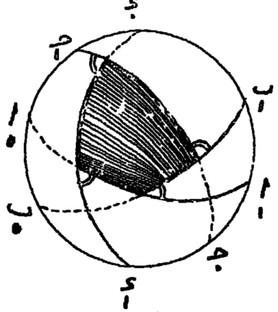
فاذا رمزنا لنصف مجموع الزوايا الخارجة بالرمز وَ

فمساحة المضلع = ٢ (ط — وَ) س٢

ومن هنا يعلم أن مساحة المضلع أقل من نصف الكرة أى ٢ ط س٢ فمساحة الشقة التى زاويتها نصف مجموع الزوايا الخارجة للمضلع

فاذا كانت أى زاوية من الزوايا الداخلة فى المضلع أكبر من زاويتين قائمتين فان الزاوية الخارجة المجاورة لها تكون سالبة وقد يحتمل بناء على ذلك أن يكون مجموع الزوايا الخارجة نفسه سالبا إما بسبب الزوايا السالبة عن الموجبة وإما بسبب أنها جميعها سالبة ومن الواضح أنه فى هذه الحالة تكون الشــقة الكروية التى ذكرت فى الفقرة السابقة سالبة ويكون المضلع الكروى أكبر من نصف الكرة بالمقدار الموجب المطابق لما ذكر وفى الواقع أنه اذا كان أى مضلع أصغر من نصف الكرة فان الباقى من سطح الكرة يتكون عنه مضلع عدد أضلاعه كعدد أضلاع المضلع السابق ولكنه أكبر من نصف الكرة وتكون مقادير الزوايا الخارجة لأحد المضلعين مساوية لمقادير زوايا المضلع الثانى ومخالفة لها فى الاشارة

٧٢ — ومن السهل الحصول على القانون البسيط ٢ (ط — وَ) نق² مباشرة فى حالة مضلع محصور جميعه فى نصف كرة واحد وذلك كما يأتى



فلنأخذ المضلع الذى فى نصف الكرة المرئى ولنفرض أن دائرة عظيمة مبتدئة بالوضع ا ا, بحيث تمر على التوالى برؤوس المضلع أى بالأوضاع ب ب, ، حـ حـ, ، ... الى أن ترجع لوضعها الأول ا ا, بجزء الدائرة الذى هو فى نصف الكرة المرئى يمر فى سيره من أحد هذه الأوضاع الى الآخر بمساحة مساوية الى الشقة التى زاويتها هى الزاوية الخارجة للمضلع (بند ٩١) والمساحة الكلية المجتازة تساوى مجموع هذه الشقق = ٤ وَ نق² ولكن فى هذه الحركة يمر نصف الدائرة الأمامى بجميع نصف الكرة الخارج عن المضلع وكذلك يفعل النصف الثانى بجميع المساحة المجتازة = ٢ (نصف الكرة — المضلع) أى أن ٤ وَ نق² = ٢ (نصف الكرة — المضلع) وعلى ذلك فالمضلع يساوى نصف الكرة — ٢ وَ نق² = ٢ (ط — وَ) نق²

واذا كانت الزوايا مبينة بالدرج فيمكن أن يكتب المقدار هكذا

$$\text{المساحة} = \frac{180 - \text{وَ}}{180} \, 2 \, \text{ط نق}^2$$

أى ان الكسر $\frac{180 - \text{وَ}}{180}$ يدل على نسبة مساحة المضلع الى مساحة نصف الكرة

ومن الواضح أن وَ يمكن أن تتغير من + ١٨٠° الى — ١٨٠° حينما تتغير مساحة المضلع من الصفر الى الكرة كلها وأنه اذا كان وَ = ٠ فان المساحة تساوى نصف الكرة

فاذا أريد معرفة المساحة التقريبيــة حينما يكون نصف قطر الكرة معلوما فيمكن أن تستعمل المقدار $\frac{٧}{٤٠٠}$ لأجل $\frac{ط}{١٨٠}$ واذن تكون المساحة مساوية

الى $\frac{٣\frac{١}{٢}}{١٠٠}$ (١٨٠ — وَ) نق^{٢}

فاذا طرحنا من النتيجة $\frac{١}{٤}$ فى المــائة فان الناتج يكون أضبط

تمرينات (١٠)

(١) المطلوب بيان أن مجموع الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه د يلزم أن يكون محصورا بين (د ± ٢) ١٨٠° وما مقاديرهاتين النهايتين فى حالة الشقة الكروية والمثلث والشكل الرباعى والخماسى الكروى ثم اذا كانت هــذه الأشكال متساوية الزوايا فمــا هى المقادير النهائية لكل من الزوايا الداخلة

(٢) المطلوب ايجاد مساحة الشكل الرباعى الكروى الذى زواياه على التناظر هى ١٠٠° ، ١١٠° ، ١٥٠° ، ٢٠٠° بفرض أن نصف قطر الكرة ١٠ أمتار

(٣) مخمس كروى منتظم مساحتــه $\frac{١}{٨}$ مساحة الكرة فمــا مقــدار احدى زواياه الداخلة

(٤) مسدس كروى منتظم مساحتــه $\frac{١}{٤}$ مساحة الكرة والمطلوب ايجــاد مقدار زواياه

(٥) مضلع كروى منتظم عدد أضــلاعه د ومساحتــه $\frac{١}{٤}$ مساحة الكرة والمطلوب بيان أن كل زاوية خارجة من زواياه تساوى $\frac{ط}{د}$

(٦) مخمس كروى منتظم زاويتــه تساوى ١٢٠° فمــا نســبة مساحته الى مساحة الكرة

(٧) اذا كان مضلع منتظم عدد أضلاعه ﮈ ومقدار زاويته الداخلة يساوى ٢ $\frac{ط}{م}$ فالمطلوب بيان أن مقدار م يمكن أن يكون مساويا لأى مقدار محصور بين النهايتين المحددتين بالمعادلة $\frac{١}{م} = \frac{١}{٢} \pm \frac{١}{ﮈ}$ ثم ما هى المقادير النهائية للمقدار م فى حالة الشقة الكروية والمثلث الكروى الخ

(٨) المطلوب بيان أنه اذا كان م = ٢ فالمضلع يتحول الى نصف كرة وأنه اذا كان ﮈ أكبر من ٢ فالمضلع يكون أقل من نصف كرة

(٩) المطلوب بيان أنه اذا كان مضلعان كرويان منتظمان متساويين فى عدد الأضلاع وكانت الزاوية الداخلة لأحدهما = $\frac{٢ط}{م}$ والزاوية الداخلة للثانى = $\frac{٢ط}{مَ}$ فان الأضلاع فى المضلعين تكون متساوية اذا كان $\frac{١}{م} + \frac{١}{مَ} = ١$

٧٣ — المضلع الكروى المتساوى الأضلاع

يمكن وضع مساحة المضلع الكروى المتساوى الأضلاع والذى عدد أضلاعه ﮈ بصورة مهمة جدا ببيان زواياه كأنها كسور من زوايا قائمة

فلتكن كل زاوية داخلة = ٢ $\frac{ط}{م}$

فتكون الزاوية الخارجة = ط − $\frac{٢ط}{م}$

وتكون المساحة = (٢ ط − ﮈ ط + $\frac{٢ﮈط}{م}$) نق^{٢}

= ﮈ ($\frac{١}{م} + \frac{١}{ﮈ} - \frac{١}{٢}$) ٢ ط نق^{٢}

ومن هنا يرى أنه اذا قسم المضلع الى مثلثات متساوية عددها ﮈ بتوصيل رؤوسه الى نقطة على سطح الكرة متساوية البعد عن جميع زواياه فان مساحة كل مثلث من هذه المثلثات تساوى

($\frac{١}{م} + \frac{١}{ﮈ} - \frac{١}{٢}$) ٢ ط نق

وهذا الأمر واضح أيضا اذا نظرنا الى زوايا أى مثلث من هذه المثلثات فان الزاويتين المجاورتين للقاعدة $= \frac{ط}{م}$ ، $\frac{ط}{م}$ وزاوية الرأس $= ٢ \frac{ط}{ن}$

ويمكن تعيين أكبر وأقل مقدار ممكن للكمية م فى مضلع عدد أضلاعه ن بسهولة وذلك بالنظر الى الحدين النهائيين لمساحة هذا المضلع وهو

$$ن \left(\frac{١}{م} + \frac{١}{ن} - \frac{١}{٢} \right) ٢ ط نق^٢$$

وذلك لأن المساحة لا يمكن أن تكون أقل من الصفر ولا أكبر من سطح الكرة أى من ٤ ط نق^٢ واذن فمقدار ن $\left(\frac{١}{م} + \frac{١}{ن} - \frac{١}{٢} \right)$ يلزم أن يكون محصورا بين ٠ ، ٢

وحينئذ يكون $\frac{١}{م} + \frac{١}{ن} - \frac{١}{٢}$ محصورا بين ٠ ، $\frac{٢}{ن}$ واذن فمقدار $\frac{١}{م}$ يكون محصورا بين $\frac{١}{٢} - \frac{١}{ن}$ ، $\frac{١}{٢} + \frac{١}{ن}$

فيكون م محصورا بين المقدارين $\frac{٢ ن}{ن \pm ٢}$

ومن هذين المقدارين المقدار م $= \frac{٢ ن}{ن + ٢}$ يجعل المضلع مغطيا للكرة ، م $= \frac{٢ ن}{ن - ٢}$ يجعل المضلع صغيرا صغرا غير محدود

وفى هذه الحالة الأخيرة تكون الزوايا مساوية لزوايا مضلع منتظم مستوٍ مساوٍ له فى عدد الأضلاع

٧٤ — المضلع الشبكى المنتظم المرسوم على كرة

اذا كان م عددا صحيحا فيمكن أن ترسم على الكرة جملة مضلعات متساوية ومتشابهة بحيث تكون مضلعات عددها م متقابلة فى كل رأس وبمقدار معين من ن ، م يمكن تغطية الكرة بشبكة من المضلعات متساوية ومتشابهة جميعا

ولأجل ايجاد مقدارى ن ، م اللذين يجعلان ذلك ممكنا نفرض أن الكرة يمكن تغطيتها تغطية تامة بعدد قدره و من تلك المضلعات

فيكون $\text{ح}\,\text{ن}\left(\frac{١}{\text{م}} + \frac{١}{\text{ح}} - \frac{١}{٢}\right) ٢\,\text{ط}\,\text{نق}^{٢} = ٤\,\text{ط}\,\text{نق}^{٢}$ (أى سطح الكرة) واذن يكون

$$\frac{٢}{\text{ح ن}} = \frac{١}{\text{م}} + \frac{١}{\text{ح}} - \frac{١}{٢}$$

ويلزم البحث الآن عن المقدار الصحيح الموجب للكميتين م ، ح الذى يجعل ن موجبا صحيحا فأما مقدار م فلا يمكن أن يتناهى فى الصغر الى أن يساوى واحدا الا فى حالة الشقة الكروية (حينما يكون ح = ٢) لأن أصغر مقدار له هو $\frac{٢\text{ح}}{\text{ح}+٢}$ واذن فيصرف النظر عن المقدار م = ١

واذا كان م = ٢ فيكون هناك مضلعان كل واحد منهما نصف كرة وهذا الأمر يكون صحيحا مهما كان مقدار ح بحيث يمكن أن نحذف هذه الحالة أيضا لأنها تؤول الى نصفى كرة فلنبحث الآن جميع المقادير الممكنة للكمية م بعد المقدار م = ٢ بفرض أن مقدار ح أكبر من ٢

(١) اذا كان ح = ٣ فان المضلعات تكون مثلثات متساوية الأضلاع وتكون المقادير النهائية للكمية م هى $\frac{٢\text{ح}}{\text{ح}\pm٢}$ أى $\frac{٦}{٣\pm٢}$ وهذه تعطى سلسلة من الأعداد الصحيحة هى ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ومنها ٢ غير محتاج اليه والعدد ٦ يجعل المثلثات صغيرة صغرا لانهائيا

فالمعادلة التى تعطى مقدار ن هى

$$\frac{٢}{٣\text{ن}} = \frac{١}{\text{م}} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{\text{م}} - \frac{١}{٦}$$

ومن هنا يكون $\text{ن} = \frac{٤\text{م}}{٦-\text{م}}$

فاذا كان م = ٣ يكون ن = ٤

واذا كان م = ٤ يكون ن = ٨

واذا كان م = ٥ يكون ن = ٢٠

واذا كان م = ٦ تكون ن = ∞

ومن هنا (باهمال الحالة التى فيها ن = ∞ لأنها تعطى عددا غير محدود من مثلثات غير محدودة صغرا) يمكن أن نقسم سطح الكرة بالتماثل بثلاث طرق

الى ٤ مثلثات زاوية كل منها = $\frac{٢ط}{٣}$ = ١٢٠°

الى ٨ مثلثات زاوية كل منها = $\frac{٢ط}{٤}$ = ٩٠°

الى ٢٠ مثلثا زاوية كل منها = $\frac{٢ط}{٥}$ = ٧٢°

ولا يمكن التقسيم الى مثلثات متساوية بأى طريقة أخرى

(٢) واذا كان د = ٤ فان المضلعات تكون أشكالا رباعية والمقادير النهائية للكمية م هى $\frac{٨}{٤+٢} = \frac{٤}{٢\pm١}$

فاذا صرفنا النظر عن المقدار م = ٢ فان المقادير الممكن وجودها هى فقط م = ٣ ، م = ٤ ولكن المقدار م = ٤ يجعل الأشكال الرباعية صغيرة صغرا لانهائيا

والمعادلة التى تعطى مقدار ن هى $\frac{١}{٢ن} = \frac{١}{م} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}$

أى ن = $\frac{٢م}{٤-م}$

فاذا كان م = ٣ يكون ن = ٦

واذا كان م = ٤ يكون ن = ∞

ومن هنا (باهمال الحالة التى يكون فيها عدد الأشكال الرباعية لانهائيا وكل واحد منها صغير صغرا لانهائيا) يمكن تقسيم الكرة بالتماثل الى أشكال رباعية بطريقة واحدة فقط أى الى ستة أشكال رباعية وكل زاوية من زواياها = $\frac{٢ط}{٣}$ = ١٢٠°

(٣) واذا كان د = ٥ فالمضلعات تكون خماسية

وبمثل هذا يمكن أن يرى فى هذه الحالة أن المقدار م = ٣ هو المقدار الصحيح الوحيد لها ما عدا الحالة غير الصحيحة التى فيها م = ٢ وأنه حينما يكون م = ٣ يكون ن = ١٢

واذن فالكرة يمكن أن تقسم الى مخمسات متساوية منتظمة بطريقة واحدة فقط وهى القسمة الى اثنى عشر مخمسا متساوية وزاوية كل واحد من هذه المضلعات = $\frac{٢ ط}{٣}$ = ١٢٠°

(٤) واذا كان د = ٦ فالمقدار الصحيح الفريد للكمية م (ما عدا المقدار م = ٢) هو م = ٣ ويرى أن هذا يعطى عددا غير محدود من مسدسات صغيرة صغرا غير متناه واذن فلا يمكن تقسيم الكرة بالتماثل الى عدد محدود من المسدسات

(٥) واذا كان د > ٦ فلا يمكن أن يوجد أى مقدار صحيح للكمية م الا المقدار م = ٢ وهو غير صحيح

فاذا جمعت الأحوال المختلفة ورتبت على حسب عدد الأقسام فان التقسيمات المتماثلة للكرة تكون كما يأتى :

٤	مثلثات	(م = ٣ ، د = ٣)
٦	أشكال رباعية	(م = ٣ ، د = ٤)
٨	مثلثات	(م = ٤ ، د = ٣)
١٢	مخمسا	(م = ٣ ، د = ٥)
٢٠	مثلثا	(م = ٥ ، د = ٣)

وذلك عدا الأحوال الخصوصية لنصفى كرة (م = ٢ ، د تساوى أى عدد صحيح) ولأى عدد من الشقق المتساوية (د = ٢ ، م تساوى أى عدد صحيح)

وفضلا عن هذه الأحوال فان هناك أحوالا لتقسيم سطح الكرة الى عدد لا نهاية له من المثلثات والأشكال الرباعية والمسدسات المتناهية فى الصغر ويظهر للطالب أن هذه الأحوال هى مماثلة لأحوال التقسيمات المتماثلة الممكنة لأى سطح مستو ولا نتكلم على هذه الأحوال فيما يأتى

٧٥ — وهناك ارتباطات بسيطة ومفيدة بين عدد المضلعات ں وعدد الرؤوس ع وعدد الأضلاع ى

فمثلا لكل مضلع أضلاع عددها د الا أن كل ضلع يكون مشتركا بين مضلعين

واذن يكون د ں = ٢ ى

ثم أن كل مضلع له رؤوس عددها د الا أن عدد المضلعات التى تتقابل فى الرأس الواحدة يساوى م

واذن يكون د ں = م ع

أيضا ٢ ى = م ع = د ں

ثم انه بسبب أن كلا من ى ، ع ، ں يلزم أن تكون أعدادا صحيحة فالمقادير الثلاثه المتساوية المبينة فيما تقدم يلزم أن تكون قابلة للقسمة على المضاعف البسيط للمقادير م ، د ، ٢ فاذا رمزنا لهذا المضاعف البسيط بالرمز (م ، د ، ٢) فانه يكون

٢ ى = م ع = د ں = ك (مَ ، د ، ٢)

وفى هذه المعادلة يكون مقدار ك عددا صحيحا أيا كان وسنعين مقداره هنا وقد ثبت فى بند ٧٤ أن

$$\frac{٢}{ن د} = \frac{١}{م} + \frac{١}{د} - \frac{١}{٢}$$

واذن يكون $\frac{١}{ى} = \frac{٢}{م ع} = \frac{٢}{ن د} = \frac{١}{م} + \frac{١}{د} - \frac{١}{٢}$

$= \frac{ل}{(م ، د ، ٢)}$ (ل هنا عدد صحيح)

فيكون $ى = \frac{(م ، د ، ٢)}{ل}$

لكن قد تبين قريبا أن ٢ى = ك (م ، د ، ٢) .

واذن يكون ك ل = ٢

أى أنه إما أن يكون ك = ١ ، ل = ٢ أو ك = ٢ ، ل = ١ .

ويرى بالاختبار أن $\frac{١}{م} + \frac{١}{د} - \frac{١}{٢}$ لا يمكن أن يكون مساويا الى $\frac{٢}{(م ، د ، ٢)}$ الا اذا كان م أو د يساوى ٢ والآخر عدد فردى وتلك هى حالة أنصاف الكرة أو الشقق الكروية واذن فيجب رفض المقدار ل = ٢ ويكون الحل الوحيد هو ك = ٢ ، ل = ١

واذن يكون $\frac{١}{م} + \frac{١}{د} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{(م ، د ، ٢)}$

، $ى = \frac{١}{٢} م ع = \frac{١}{٢} د ن = (م ، د ، ٢)$ ...

٧٦ — الخمسة الكثيرات السطوح المنتظمة الكروية

ان المعادلة الأولى المذكورة فى آخر بنـد ٧٥ تعين جميع المقـادير الممكنة لكمبتى م ، د التى سبق بحثها والمعـادلة الثـانية تمكننا من معرفة عدد الأضلاع والرؤوس والمضلعات فى كل حالة ومقدار د يعين عدد الأضلاع فى كل مضلع ومقدار م يعـين عدد الزوايا التى تتقابل فى كل رأس ويقال للرأس ثلاثية أو رباعية أو خماسية على حسب ما يكون عدد الزوايا المتقابلة فيها ٣ أو ٤ أو ٥

(١) الجسم ذو الأربعة الأوجه الثلاثية

حينما يكون م = ٣ ، د = ٣ يكون (م ، د ، ٢) مساويا ٦

واذن يكون ں = ٤ ، ع = ٤ ، ے = ٦

أى ان المضلع الشبكى يتركب من أربعة مثلثات تشتمل على أربع رؤوس مثلثية وستة أضلاع وهذه الشبكة تسمى شبكة كروية منتظمة ذات أربعة أوجه ثلاثية ومقـدار كل زاوية من زوايا الرؤوس ١٢٠ وزاوية كل ضلع (أى الزاوية المركزية المقابلة للضلع) تساوى $\frac{١}{٢}$ ١٠٩°

(٢) الجسم ذو الستة الأوجه الرباعية

حينما يكون م = ٣ ، د = ٤ فمقـدار (م ، د ، ٢) يساوى ١٢

واذن يكون ں = ٦ ، ع = ٨ ، ے = ١٢

وهذه الشبكة تسمى شبكة منتظمة كروية ذات ستة أوجه رباعية لأن المضـلعات أو الأوجه المشتملة عليها هى سـتة ولها ثمانيـة رؤوس ثلاثيـة

واثنا عشر ضلعا ومقدار كل زاوية من زوايا الرأس ١٢٠° وسنبرهن فيما سيأتى على أن زوايا الأضلاع كل منها $\frac{1}{2}$ ٧٠° أى الزاوية المكملة لزاوية الشكل ذى الأربعة الأوجه الثلاثية

(٣) الجسم ذو الثمانية الأوجه الثلاثية

حينما يكون م = ٤ ، د = ٣ فمقدار (م ، د ، ٢) هو ١٢

واذن يكون ں = ٨ ، ع = ٦ ، ے = ١٢

وهذه الشبكة تسمى شبكة منتظمة كروية ذات ثمانية أوجه ثلاثية وستة رؤوس رباعية واثنى عشر ضلعا

وكل من زوايا الرؤوس ٩٠° وكذلك زوايا الأضلاع ومن الواضح أنه يمكن الحصول على هذا الشكل برسم ثلاث دوائر عظيمة على سطح الكرة متعامدة بعضها على بعض

(٤) الجسم ذو الاثنى عشر وجها الخماسى

حينما يكون م = ٣ ، د = ٥ يكون مقدار (م ، د ، ٢) مساويا الى ٣٠

واذن يكون ں = ١٢ ، ع = ٢٠ ، ے = ٣٠

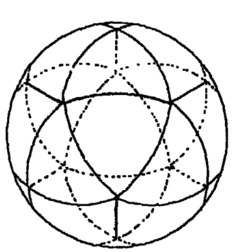
وهذا الشكل يسمى الشكل ذا الاثنى عشر وجها الكروى المنتظم وله ١٢ وجها خماسيا و ٢٠ رأسا مثلثيا و ٣٠ ضلعا

ومقدار كل زاوية من زوايا الرؤوس ١٢٠° وسنبرهن فيما سيأتى على أن زوايا الأضلاع $\frac{4}{5}$ ٤١° .

(٥) الجسم ذو العشرين وجها الثلاثى

حينما يكون م = ٥ ، د = ٣ فمقدار (م ، د ، ٢) يساوى ٣٠

واذن يكون ں = ٢٠ ، ع = ١٢ ، ے = ٣٠



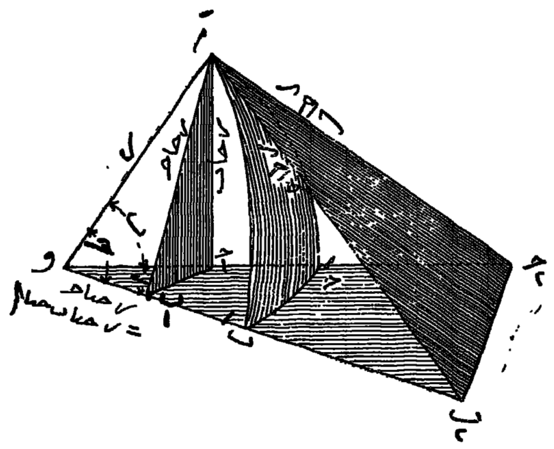
وهــذا الشكل يسمى ذا العشرين وجها الكروى المنتظم وله عشرون وجها مثلثيا واثناعشر رأسا خماسيا وثلاثون ضلعا وزاوية كل رأس فيه ٧٢° وزوايا أضلاعه ٦٣ ½° وهو موضح فى الشكل

ويجب على الطالب أن يرسم هــذه المضلعات الشبكية الخمســة المنتظمة على كرات بأدق ما يمكنه ولأجل الحصول على أوتار الأضـلاع التى يحتاج اليها فى ايجاد الأطوال المضــبوطة للأضلاع بواســطة البرجل يلزم أن ترسم دائرة عظيمة من الكرة بمقياس الطبيعة ثم ترسم زوايا الأضلاع فى مركز الكرة فأوتار الأقواس المتحصلة بهذه الكيفية تكون هى الأوتار المطلوبة

٧٧ — ولنختم هذا الفصل ببحث خاص بالارتباط بين الزوايا والأضلاع لمضلع كروى منتظم وتطبيق ذلك على الأشكال الشبكية الخمسة المنتظمة

تمهيــــد

ليكن اَ بَ حـ مثلثا كرويا قائم الزاوية فى حَ ولتكن نقطة و مركز الكرة فنرسم الخط اَ حـ١ عموديا على و حَ ، اَ ب١ عموديا على و بَ فيكون ب١ حـ١ عموديا على و ب١ ، اَ حـ١ وتكون الزاوية ا ب١ حـ١ مساوية لزاوية بَ فى المثلث



ولنرسم اَ بـ٢ ، اَ حـ٢ عمودين على و اَ فيقابلان و ب ، و حَ فى نقطتى ب٢ ، حـ٢ على التناظر

واذن يكون ب٢ حـ٢ عمودا على و حـ٢ ، اَ حـ٢ والزاوية ب٢ اَ حـ٢ تساوى الزاوية اَ من المثلث

ولنرمز للزوايا التى رأسها نقطة و المقابلة لأضلاع المثلث اُ ب حُ بحروف ا ، ب ، حـ

فحينئذ اذا نظرنا الى المثلثات القائمة الزاوية و اُ حـ١ ، و ا ب١ ، و حـ١ ب١ فاننا نجد المعادلة

جتا حـ = جتا ا حا ب . . . . . (١)

ثم من المثلث اَ ب١ حـ١ يوجد

جا بَ = جا ب ÷ حا حـ . . . . . (٢)

ومن المثلث ا ب٢ حـ٢ يوجد

جتا اَ = ظا ب ÷ ظا حـ . . . . . (٣)

ومن هذه المعادلات الثلاث يمكن أن يستخرج

$\frac{\text{جتا اَ}}{\text{جا بَ}} = \frac{\text{جتا حـ}}{\text{جتا ب}}$ جتا ا . . . . . (٤)

وبمثل ذلك يكون

$\frac{\text{جتا ب}}{\text{جا اَ}} =$ جتا ب . . . . (٥)

وأخيرا يستخرج من معادلات (٤) و(٥) و(١)

ظا اَ ظتا بَ = جتا حـ . . . . . . (٦)

٧٨ — فاذا أخذنا الآن أى مضلع كروى منتظم ق ك م مشتمل على أضلاع عددها د وفرضنا أن زواياه التى مثل ق ك م كل واحدة منها تساوى ٢ $\frac{ط}{م}$ بفرض أن م عدد أيا كان صحيحا أو كسريا محصور بين النهايتين الممكنتين وهما $\frac{٢ د}{د \pm ٢}$

فمن تماثل الشكل يتضح أن أى نقطة مثل وَ يمكن أن توجد على سطح الكرة وعلى أبعاد متساوية عن رؤوس المضلع بحيث تكون الدوائر العظيمة المرسومة بحيث تمر بنقطة وَ وبرأس الشكل منصفة لزوايا الشكل والدوائر العظيمة المارة بنقطة وَ عمودية على الأضلاع تنصفها

ثم أن الزاوية ق وَ ك = ٢ $\frac{ط}{د}$ لأن الشكل يشتمل على زوايا عددها د مجتمعة حول نقطة وَ ومجموع تلك الزوايا يساوى أربع زوايا قوائم

واذن فالمثلث ں وَ ك المبين بالرسم هو مثلث كروى قائم الزاوية فى ك وزاوية ں $= \frac{\text{ط}}{\text{م}}$ والزاوية التى رأسها فى وَ $= \frac{\text{ط}}{\text{د}}$ واذن فيستنتج من المعادلات (٤)،(٥)،(٦) المتقدمة مع ملاحظة أن نقطة و هى مركز الكرة —

$$\text{جتا ں وك} = \text{جتا} \frac{\text{ط}}{\text{د}} \div \text{حا} \frac{\text{ط}}{\text{م}}$$

$$\text{جتا وَ وك} = \text{جتا} \frac{\text{ط}}{\text{م}} \div \text{حا} \frac{\text{ط}}{\text{د}}$$

$$\text{، جتا ں و وَ} = \text{ظتا} \frac{\text{ط}}{\text{م}} \times \text{ظتا} \frac{\text{ط}}{\text{د}}$$

والمعادلة الأولى من هذه المعادلات توصلنا الى ايجاد مقدار ں ك ثم ايجاد ں ک والمعادلة الثانية والثالثة يحتاج اليها فى المضلعات الآتية فى الفصل التالى

٧٩ — ولنبحث الآن عن أطوال أضلاع المضلعات الخمسة الكروية الشبكية المنتظمة (بدلالة الزوايا المركزية المقابلة لها)

(١) ففى الشكل ذى الأربعة أوجه المثلثية يكون م = د = ٣

واذن يكون $\text{جتا ں وك} = \text{جتا} \frac{\text{ط}}{٣} \div \text{جا} \frac{\text{ط}}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ،

$$\text{، جتا ں و ک} = ٢ \ \text{جتا}^{٢} \ \text{ں وك} - ١$$

واذن يكون

$$\text{جتا ں و ک} = - \frac{١}{٣}$$

ومن هنا يكون $\text{ں و ک} = ١٨٠^{\circ} - ٧٠ \frac{١}{٢}^{\circ}$ (تقريبا)

$$= ١٠٩ \frac{١}{٢}^{\circ}$$

وهذا الرسم قد أنشئ بجعل و م = ٣ و ں

(٢) وفى الشكل الكروى ذى الستة أوجه يكون م = ٣ ، د = ٤ واذن يكون

$$\text{جتا ن و ك} = \text{جتا} \frac{\text{ط}}{٤} \div \text{جا} \frac{\text{ط}}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \div \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{\frac{٢}{٣}}$$

ومنه $\text{جتا ن و ى} = \frac{١}{٣}$

أى $\text{ن و ى} = ٧٠ \frac{١}{٢}^{\circ}$

وهذه الزاوية هى مكملة الزاوية التى وجدت فى الحالة السابقة واذن فتكون الزاوية المطلوبة هى الزاوية نَ و ى فى الشكل المتقدم .

(٣) وفى الشكل ذى الثمانية أوجه الكروى يكون م = ٤ ، د = ٣ واذن يكون

$$\text{جتا ن و ك} = \text{جتا} \frac{\text{ط}}{٣} \div \text{حا} \frac{\text{ط}}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

واذن يكون $\text{ن و ك} = ٤٥^{\circ}$

، $\text{ن و ى} = ٩٠^{\circ}$

(٤) وفى الشكل الكروى ذى الاثنى عشر وجها يكون م = ٣ ، د = ٥

ويكون $\text{جتا ن و ك} = \text{جتا} \frac{\text{ط}}{٥} \div \text{حا} \frac{\text{ط}}{٣} = \frac{\sqrt{٥} + ١}{٢ \sqrt{٣}}$

، $\text{جتا ن و ى} = \frac{١}{٣} \sqrt{٥}$ ، $\text{جا ن و ى} = \sqrt{١ - \frac{٥}{٩}} = \frac{٢}{٣}$

ويكون $\text{ن و ى} = ٤١ \frac{٤}{٥}^{\circ}$ تقريبا

ومقدار حا ن و ى يساوى $\frac{٢}{٣}$ واذن فيكون الرسم كما هو موضح فى الشكل وفيه يكون و د $= \frac{٣}{٢}$ و ن ، م د يكون موازيا للخط و ن

(٥) وفى الشكل الكروى ذى العشرين وجها يكون م = ٥ ، ن = ٣

واذن يكون جتا ى و ك = جتا $\frac{ط}{٣}$ ÷ جا $\frac{ط}{٥}$

$= \frac{\sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}}}{٢}$

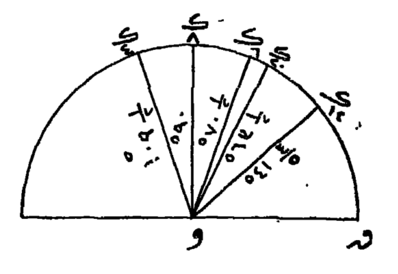
ومن هنا يكون ظا ى و ك = ٢

واذن يكون جتا ى و ك = $\frac{١}{٥}\sqrt{٥}$

أى أن ى و ك = $٦٣\frac{١}{٢}$° تقريبا

وقد رسم هذا الشكل بأخذ ى م = ٢ و ى

والشكل التالى يبين أطوال الأقواس الخاصة بالزوايا السابق ذكرها لكرة نصف قطرها بوصة وربع أى بحجم كرة اللعب



تمرينات (١١)

(١) المطلوب ايجاد زوايا مثلث كروى منتظم مساحته تساوى $\frac{١}{١٠}$ مساحة الكرة وايجاد طول ضلع هذا المثلث أيضا (أى مقدار الزاوية المركزية المقابلة له)

(٢) المطلوب ايجاد زوايا وأضلاع شكل رباعى كروى منتظم مساحته $\frac{١}{١٠}$ مساحة الكرة

(٣) المطلوب ايجاد زوايا وأضـلاع مخمس كروى منتظم مساحتـه $\frac{١}{١٠}$ مساحة الكرة

(٤) المطلوب ايجاد زوايا وأضلاع مســدس كروى منتظم مساحته $\frac{١}{١٠}$ مساحة الكرة

(٥) المطلوب ايجاد أطوال أضلاع مثلث كروى متساوى الساقين وزواياه ٤٥° ، ٤٥° ، ١٢٠° (وقسمته الى مثلثين كرويين قائمى الزاوية بقوس مار برأس الزاوية الثالثة ويقطع القاعدة)

(٦) اذا وصلت نقط مراكز الأوجه المتجاورة (وَ) من شـكل كروى ذى أربعة أوجه مثلثية منتظم فالمطلوب بيان أن الشكل الحادث يكون شكلا ذا أربعة أوجه مثلثية كرويا منتظما أيضا

(٧) اذا وصلت نقط مراكز الأوجه المتجاورة من شكل سداسى كروى منتظم فالمطلوب بيان أن الشكل المتكون بهذه الصورة هو شكل ذو ثمـانية أوجه كروى منتظم وأن رؤوس الشـكل ذو السـتة أوجه تكون هى النقط المركزية لأوجه الشكل ذى الثمـانية الأوجه المنتظم الحادث

(٨) المطلوب اثبات أنه اذا وصـلت النقط المركزية للأوجه المتجاورة لشكل كروى منتظم ذى اثنى عشر وجها فان الشـكل الحادث يكون شكلا كرويا منتظما ذا عشرين وجها — وأنه اذا كان الشكل المفروض ذا عشرين وجها منتظما فان الشكل الحادث يكون ذا اثنى عشر وجها منتظما

(٩) من الارتباطات المبينة فى آخر بند ٧٥ المطلوب اثبات أن ں + ع = ے + ٢ واذكر أمثلة لذلك فى الأحوال المختلفة لكثيرات السطوح المنتظمة

الفصل الرابع

كثيرات الأوجه المستوية المنتظمة

٨٠ — اذا رسم مستو مماس للكرة فى نقطة وَ (أنظر الشكل المرسوم فى بند ٧٨) وفرض خط يمر على الدوام بمركز الكرة و يمر أيضا حول محيط المضلع الكروى المنتظم ى ك ر فان هذا الخط يرسم على المستوى كثيرأضلاع منتظما عدد أضلاعه كعدد أضلاع المضلع الكروى ومركزه نقطة وَ

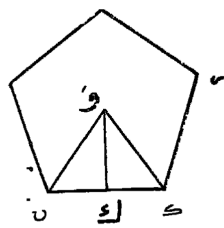
و بسبب التماثل يمكن أن يرى أنه اذا رسم كثير سطوح كروى منتظم كما فى الفصل السابق وكونت كثيرات الأضلاع المستوية الخاصة به كما ذكر فان هذه المضلعات المستوية يتكون عنها مجتمعة سطح مقفول أوجه جميعها مضلعات منتظمة متساوية ومتشابهة مماسة جميعها لسطح الكرة فى نقط مراكزها التى هى أيضا مراكز المضلعات الكروية المناظرة لها

والجسم المحصور بهذه الكيفية يسمى كثيرالأوجه المستوية المنتظم أو يسمى كثير الأوجه المنتظم باختصار

و يرى مما تقدم فى الفصل السابق أن هناك خمسة أحوال ممكنة الوجود وهى ذو الأربعة أوجه وذو الستة أوجه وذو الثمانية الأوجه وذو الاثنى عشر وجها وذو العشرين وجها

وأوجه الجسم الرباعى والمثمن وذى العشرين وجها هى مثلثات متساوية الأضلاع وأما أوجه الجسم السداسى فهى مربعات بحيث يكون ذو الستة الأوجه مكعبا أما أوجه ذو الاثنى عشر وجها فهى مخمسات منتظمة

والزوايا التى رأسها فى مركز الكرة والتى تقابلها الأضـلاع المقابلة لها هى الخطوط ں ك ٬ وَ ك ٬ وَ ں من كثير الأضلاع المستوى هى مساوية للزوايا التى تقابلها الخطوط المناظرة لها فى المضـلع الكروى المناظر له وذلك لأن النقط ں ٬ وَ ٬ ك تحصل فى المضلع المستوى بتوصيل خطوط من مركـز الكرة الى النقط المنـاظرة وهى ں ٬ وَ ٬ ك من المضـلع الكروى واذن



يكون جتا ں و ك = جتا $\frac{ط}{د}$ ÷ جا $\frac{ط}{م}$

٬ جتا وَ و ك = جتا $\frac{ط}{م}$ ÷ جا $\frac{ط}{د}$

٬ جتا ں و وَ = ظتا $\frac{ط}{م}$ × ظتا $\frac{ط}{د}$

والزوايا الخارجة المحصورة بين وجهى مضلعين متجاورين = ٢ و و ك لأنه اذا كانـ وَ ٬ وً همـا مركزا المضلعين أى نقط تمـاسهما بالكرة فالزاوية الداخلة المحصورة بين هذين المستويين هى و َ ك وً وهى الزاوية المكملة لزاوية وَ و وً لأن زاويتى وَ ٬ وً هما زاويتان قائمتان وأيضـا فان وَ و وً = ٢ وَ و ك وهذا ما يثبت هذا الغرض

والزاوية المركزية التى يقابلها الضلع ں ک = ٢ ں و ك

٨١ — وينبغى أن يلاحظ أن ذا الســتة الأوجه المنتظم أو المكعب وذا الثمانية الأوجه يكونان زوجا من كثيرات الأوجه ذا خواص متعاكسـة وذلك لأنه فى المكعب م = ٣ ٬ د = ٤ وفى ذى الثمـانية الأوجه يكون م = ٤ ٬ د = ٣ فاذا بحثنا فى الارتباطات

٢ ے = م ع = ں ں = ضعف المضاعف البسيط

والارتباطات حا ى وك = حا $\frac{\text{ط}}{\text{د}}$ ÷ حا $\frac{\text{ط}}{\text{م}}$

حا وَ وك = حا $\frac{\text{ط}}{\text{م}}$ ÷ حا $\frac{\text{ط}}{\text{د}}$

فاننا نرى أن عدد الأضلاع واحد فى الجسمين أى ١٢

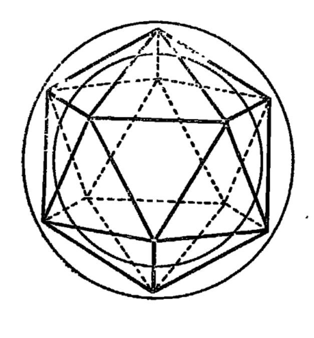
وأن عدد الرؤوس فى الجسم ذى الثمانية الأوجه يساوى عدد أوجه المكعب أى يساوى ٦

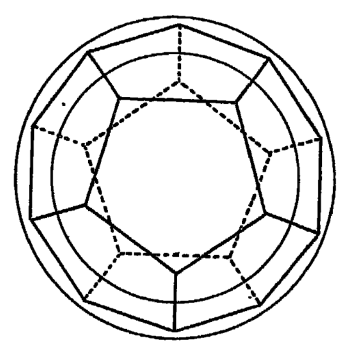
وأن عدد الرؤوس فى المكعب يساوى عدد الأوجه فى ذى الثمانية الأوجه أى ٨

وأن الزاوية الخارجة الواقعة بين وجهين متجاورين من الجسم ذى الثمانية الأوجه تساوى الزاوية المركزية فى و المقابلة لأى ضلع من أضلاع المكعب أى تساوى ٧٠ $\frac{1}{2}$°

وان الزاوية الخارجة الواقعة بين وجهين متجاورين من المكعب تساوى الزاوية المركزية فى و والتى تقابل ضلع ذى الثمانية أوجه أى تساوى ٩٠° ويرى أيضا (بالالتفات الى معنى م ، د) أن هناك أربع زوايا مستوية متقابلة فى رأس من رؤوس ذى الثمانية الأوجه ومناظرة للأضلاع الأربعة التى فى وجه من أوجه المكعب وثلاث زوايا مستوية متقابلة فى رأس من رؤوس المكعب وهى مناظرة للأوجه الثلاثية من الشكل ذى الثمانية الأوجه

وبمثل ذلك يرى أن ذا الاثنى عشر وجها وذا العشرين وجها لهما خواص متعاكسة لأنه يكون فى واحد منهما م = ٣ ، د = ٥ وفى الثانى م = ٥ ، د = ٣





فعدد الأضلاع فى كل منهما يساوى ٣٠

وعدد الرؤوس فى ذى العشرين وجها = عدد الأوجه فى ذى الاثنى عشر وجها = ١٢

وعدد الرؤوس فى ذى الاثنى عشر وجها = عدد الأوجه فى ذى العشرين وجها أى عشرين

والزاوية الخارجة الواقعة بين الوجهين المتجاورين من ذى العشرين وجها تساوى الزاوية المركزية فى و المقابلة لضلع ذى الاثنى عشر وجها أى تساوى $\frac{٤}{٥}$ ٤١°

والزاوية الخارجة الواقعة بين وجهين متجاورين من ذى الاثنى عشر وجها تساوى الزاوية المركزية فى و وتقابل ضلع ذى العشرين وجها أى تساوى $\frac{١}{٢}$ ٦٣° وأيضا فانه يستنتج من معنى م ٦ د أن خمس زوايا مستوية تجتمع فى رأس ذى العشرين وجها تناظر الأوجه المخمسة لذى الاثنى عشر وجها وأن ثلاث زوايا مستوية تتقابل فى رأس من رؤوس ذى الاثنى عشر وجها وهى مناظرة للأوجه المثلثية لذى العشرين وجها

وقد بينا رسم هذين الجسمين فى الأشكال مع الكرات المحيطة بها والمحاطة بها وقد يحتمل أن يرى الطالب أن مما يفيده أن يختبر الأشكال الحقيقية للجسمات من رسوماتها وأن ينظر لها بعين واحدة فقط (وقد حصل تساهل فى رسم الأشكال بمقاييس مختلفة وكان الأحسن أن ترسم كلها بنسبتها الى كرة واحدة)

٨٢ — سطح كثير الأوجه المنتظم

يمكن بيان مساحة سطح كثير الأوجه المنتظم بدلالة س والزاوية ق و وَ ومقدار هذه الزاوية يمكن ايجاده من المعادلة

$$\text{جتا ق و وَ} = \text{طا} \frac{ط}{م} \text{ طا} \frac{ط}{د}$$

فاذا رمزنا لهذه الزاوية بالرمز هـ فانه يكون

$$\text{وَ ق} = \text{س طا هـ}$$

$$\text{ومساحة المثلث} \quad \text{ق وَ ى} = \frac{١}{٢} (\text{س طا هـ})^٢ \text{ حا} \frac{٢ ط}{د}$$

$$\text{واذن تكون مساحة المضلع} = \frac{د}{٢} \text{ س}^٢ \text{ طا}^٢ \text{ هـ حا} \frac{٢ ط}{د}$$

$$\text{ومساحة كثير الأوجه} = \frac{د ق}{٢} \text{ س}^٢ \text{ طا}^٢ \text{ هـ حا} \frac{٢ ط}{د}$$

$$= \text{ل س}^٢ \text{ طا}^٢ \text{ هـ حا} \frac{٢ ط}{د}$$

وفى هذا القانون ل هو المضاعف البسيط للكميات (٢ ، م ، د) وهو يساوى عدد أضلاع كثير الأوجه

وهذا المقدار المبين للمساحة يمكن أن يكتب بهذه الصورة

$$\text{ل س}^٢ \text{ حا} \frac{٢ ط}{د} \left(\text{طا}^٢ \frac{ط}{م} \text{ طا}^٢ \frac{ط}{د} - ١\right)$$

$$\text{لأن} \qquad \text{قا هـ} = \text{طا} \frac{ط}{م} \text{ طا} \frac{ط}{د}$$

وأســطح كثيرى الأوجه المتعاكسين المرسومين على كرة واحدة يرتبطان ببعضهما ارتباطا بسيطا وذلك لأن جميع العوامل فى كل منهما واحدة ما عدا حا $^{٢}\frac{\text{ط}}{\text{د}}$ واذن يكون

$$\frac{\text{سطح الجسم ذى الثمانية أوجه}}{\text{سطح المكعب}} = \frac{\text{حا}^{٢}\frac{\text{ط}}{٣}}{\text{حا}^{٢}\frac{\text{ط}}{٤}}$$

$$\frac{\text{سطح ذى العشرين وجها}}{\text{سطح ذى الاثنى عشر وجها}} = \frac{\text{حا}^{٢}\frac{\text{ط}}{٣}}{\text{حا}^{٢}\frac{\text{ط}}{٥}} \quad ،$$

٨٣ — حجم كثير الأوجه المنتظم

يمكن الحصول على حجم كثير الأوجه المنتظم من سطحه بضربه فى $\frac{١}{٣}$ ىو والمراد بالرمز ىو نصف قطر الكرة المرسومة داخله وذلك لأنه يمكن تقسيمه الى أهرام قواعدها هى أوجه كثير الأوجه ورؤوسها فى مركز الكرة

وهــذه النظرية صحيحة أيضا فى كثير الأوجه غير المنتظم بشرط أن يكون ممكنا رسم كرة تمس جميع أوجهه

ومن هنا يرى أن أحجام كثيرات الأوجه المرسومة على الكرة مناسبة لمسائح أوجهها

ويمكن تحصيل حجم ذى الثمانية الأوجه المنتظم المرسوم على الكرة التى نصف قطرها ىو مباشرة بهذه النظرية لأن

$$\frac{\text{حجم ذى الثمانية الأوجه المنتظم}}{\text{حجم المكعب}} = \frac{\text{سطح ذى الثمانية الأوجه}}{\text{سطح المكعب}}$$

$$= \frac{\text{حا}^{٢}\frac{\text{ط}}{٣}}{\text{حا}^{٢}\frac{\text{ط}}{٤}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

ولكن حجم المكعب $= (٢ \text{نق})^٣ = ٨ \text{نق}^٣$

فحجم ذى الثمانية الأوجه $= ٤ \sqrt{٣} \cdot \text{نق}^٣$

وسطحه $= ١٢ \sqrt{٣} \cdot \text{نق}^٢$

٨٤ — نصف قطرى الكرتين المرسومتين داخلا وخارجا

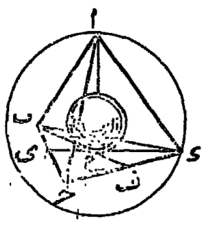
قد اعتبرنا كثير السطوح المنتظم كأنه مرسوم على الكرة وأن حجمه يمكن تعيينه بدلالة نصف القطر

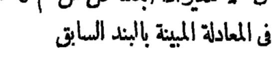
ومن تماثل شكله يتضح أن رؤوس كثير السطوح المنتظم موجودة على سطح كرة أخرى مركزها هو نفس مركز الكرة الداخلة

فليكن $\text{نق}_١$ نصف قطر الكرة المارة بالرؤوس و نق نصف قطر الكرة التى تمس الأوجه فيكون

$$\frac{\text{نق}_١}{\text{نق}} = \text{جتا هـ} = \text{ظا}\frac{ط}{م}\ \text{ظا}\frac{ط}{د}$$

٨٥ — اذا كان كثيرا سطوح متعاكسان مرسومين على كرة واحدة فانهما يكونان بعينهما مرسومين داخل كرة واحدة وذلك لأن نسبة $\text{نق}_١$ الى نق لا تتغير اذا أبدلنا كل من م ، د بالآخر فى المعادلة المبينة بالبند السابق





٨٦ — مساحة أى شكل كثير السطوح منتظم بدلالة نصف القطر $\text{نق}_١$ للكرة المرسومة عليه تحصل بأن نكتب $\text{نق} = \text{نق}_١ \text{ جتا هـ}$

واذن فهى تساوى لـ $\text{نق}_١^٢ \text{ جا}^٢ \text{هـ جا} \frac{٢ط}{د}$

ويتحصل الحجم بضرب هذه الدالة فى المقدار

$\frac{١}{٣}$ ى$_{١}$ جتا هـ

٨٧ — ويمكن تحصيل سطح وحجم الشكل ذى الأربعة الأوجه المنتظم المرسوم على كرة بدلالة نصف قطر الدائرة الداخلة بغير مساعدة حساب المثلثات الكروية

وذلك لأن الحجم يساوى $\frac{١}{٣}$ القاعدة × الارتفاع ويساوى أيضا $\frac{٤}{٣}$ القاعدة × نصف قطر الكرة وذلك لأنه هرم واحد ممكن تكوينه من أربعة أهرام رؤوسها فى مركز الكرة وقواعدها هى الأربعة الأوجه المتساوية للشكل ذى الأربعة الأوجه

أى أن $\quad$ ى $= \frac{١}{٤}$ الارتفاع

واذن فاذا أمكن ايجاد مقدار القاعدة بدلالة ارتفاع ذى الأربعة الأوجه فانه يمكن ايجاد السطح والحجم بدلالة مقدار ى

فاذا رمزنا للارتفاع أ ح [١] بالرمز هـ وفرضنا أن أ مقدار ضلع ذى الأربعة الأوجه المنتظم فانه يكون

$$ى د = \frac{أ\sqrt{٣}}{٢} \text{ ، } د ح = \frac{٢}{٣} \cdot \frac{أ\sqrt{٣}}{٢} = \frac{أ\sqrt{٣}}{٣}$$

واذن يكون

$$هـ^{٢} = أ^{٢} - \left(\frac{أ\sqrt{٣}}{٣}\right)^{٢} = \frac{٢}{٣} أ^{٢}$$

$$\text{أو} \quad أ^{٢} = \frac{٣}{٢} هـ^{٢} = ٢٤ ى^{٣}$$

(١) أنظر الشكل فى بندى ٨٦ ، ٨٧ فالمثلث المتساوى الأضلاع فى الأسفل هو مستوى قاعدة ذى الأربعة أوجه ومقاس الشكل الأسفل هو مقاس الشكل الأعلا وكل نقطة منه موضوعة رأسيا تحت النقطة المناظرة لها من الشكل العلوى

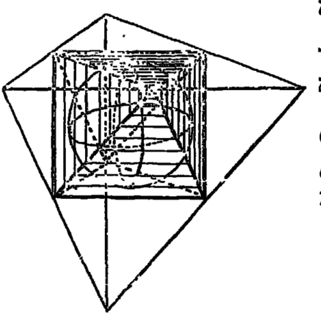
ومساحة القاعدة = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{أ}^{٢} = ٦\sqrt{٣}\,\text{نق}^{٢}$

واذن يكون سطح الشكل ذى الأربعة أسطح $٢٤\sqrt{٣} \times \text{نق}^{٢}$

والحجم يساوى $٨\sqrt{٣} \times \text{نق}^{٣}$

٨٨ — الارتباطات بين ذى الأربعة الأوجه وذى الثمانية الأوجه

اذاقطع من زوايا ذى الأربعة الأوجه المنتظم أربعة أجسام صغيرة كل منها ذو أربعة أوجه بمستويات مارة بمنتصفات الأضلاع فكل واحد من هذه الرباعيات الأوجه الصغيرة يكون ثمن الحجم الأصلى لأن ضلع كل منها نصف الضلع الأصلى وأحجام الأشكال المتماثلة مناسبة لمكعبات أضلاعها المتناظرة



واذن يكون حجم مايبقى من ا الشكل الذى هو ذو ثمانية أوجه منتظم نصف حجم ذى الأربعة الأوجه المنتظم ويمكن أن يرى أيضا بالسهولة من الشكل أن سطح ذى الثمانية الأوجه المنتظم هو نصف ذى الأربعة الأوجه لأن جميع الثمانية الأوجه هى مثلثات متساوية الأضلاع ومسائح كل منها يساوى ربع مساحة أحد أوجه ذى الأربعة الأوجه المنتظم وهذا يثبت أن كلا من ذى الثمانية الأوجه وذى الأربعة الأوجه لهما دائرة واحدة مرسومة داخلهما (أنظر بند ٨٣) وهذا أيضا واضح من أن النقط الأربع التى تتقابل فيها الدائرة الداخلة بذى الأربعة الأوجه المنتظم هى على الأوجه التى لم تقطع بحيث أن الكرة تمس أيضا ذا الثمانية الأوجه فى هذه النقط الأربع بعينها كما تمسه أيضا فى أربعة أخرى

تمرينات (١٢)

(١) المطلوب اثبات أن أسطح كثيرات الأوجه المنتظمة المرسومة على كرة نصف قطرها نق هى كما يأتى

سطح ذى الأربعة الأوجه المنتظم = ٤ نق^{٢} ٢ $\sqrt{٣}$ = ٤١,٥٧ نق

المكعب = ٢٤ نق^{٢}

سطح ذى الثمانية الأوجه المنتظم = ١٢ نق^{٢} $\sqrt{٣}$ = ٢٠,٧٨ نق^{٢}

« الاثنى عشر وجها « = ١٦,٦٥ نق^{٢}

« العشرين « « = ١٥,١٦ نق^{٢}

« الكرة نفسها = ١٢,٥٧ نق^{٢}

(٢) المطلوب اثبات أن أسطح كثيرات الأوجه المنتظمة المرسومة داخل كرة نصف قطرها نق هى كما يأتى

سطح ذى الاثنى عشر وجها = ١٠,٥١ نق^{١}

« « العشرين وجها = ٩,٥٧ نق^{٢}

« « المكعب العشرين وجها = ٨,٠٠ نق^{٢}

« « الثمانية الأوجه المنتظم = ٤ نق^{٢} $\sqrt{٣}$ ≐ ٦,٩٣ نق^{٢}

« « الأربعة « « = ٤,٦٢ نق^{٢}

(٣) المطلوب اثبات أن حجم ذى الثمانية الأوجه المنتظم المرسوم فى كرة نصف قطرها نق هو $\frac{٤}{٣}$نق^{٣} وان النسبة بين حجم الكرة وحجم ذى الثمانية الأوجه المرسوم فيها = ط

(٤) المطلوب اثبات أنه اذا كان نقط تماس كثير الأوجه المنتظم مع الكرة المرسومة داخله هي رؤوس كثير أوجه منتظم مرسوم داخل الكرة فان كثيرى الأوجه المذكورين يكونان متعاكسين أى أنه اذا كان أحدهما مكعبا فالآخر مثمن واذا كان أحدهما ذا اثنى عشر وجها فالثانى ذو عشرين وجها واذا كان أحدهما ذا أربعة أوجه فالثانى مثله

(٥) المطلوب اثبات أن سطح ذى الأربعة الأوجه المنتظم المرسوم فى كرة يساوى $\frac{1}{9}$ سطح ذى الأربعة الأوجه المنتظم المرسوم على الكرة وان النسبة بين الحجمين كنسبة ١ الى ٢٧

(٦) المطلوب ايجاد حجمى ذى الاثنى عشر وجها المنتظم وذى العشرين وجها المنتظم المرسومين على كرة نصف قطرها نق

(٧) المطلوب ايجاد حجم ذى اثنى عشر وجها منتظم وذى عشرين وجها منتظم مرسومين فى كرة نصف قطرها نق

(٨) المطلوب ايجاد حجم مكعب مرسوم فى كرة نصف قطرها نق

(٩) المطلوب بيان أسطح وأحجام الأجسام الخمسة المنتظمة بدلالة أطوال أضلاعها

الفصل الخامس

أحجام الأجسام

٨٩ – لأجل تعيين حجم جسم محدود بوجهين مستويين متوازيين يحتاج الى تحقيق مقدار القطاع العرضى المتوسط للجسم الموازى لهذين الوجهين أى القطاع العرضى لأسطوانة مساوية للجسم فى الارتفاع وحجمها مساو لحجم الجسم المفروض وعليه يكون الحجم هو حاصل ضرب الارتفاع فى هذا القطاع العرضى

٩٠ – والطريقة التى تعطى القطاع المتوسط الحقيقى فى حالة جميع الأجسام البسيطة والتى هى أفيد طريقة كقانون تقريبى فى الأحوال المركبة هى اضافة مساحتى الوجهين المتوازيين المتطرفين وأربعة أمثال مساحة القطاع الموزى لهما الواقع فىمنتصف المسافة بينهما وقسمة الناتج على ٦ الذى هو عدد الأوجه التى ضمت الى بعضها بهذه الكيفية أى ان (بالضبط أو بالتقريب)

القطاع المتوسط = $\frac{1}{6}$ (مجموع القطاعين المتطرفين + ٤ أمثال القطاع الواقع فى الوسط)

وليس من الممكن أن نبالغ فى أهمية هذا القانون وهو معروف باسم القانون المنشورى أو قانون سمبسون

ولأجل استعمال هذا القانون يجب أن يقاس القطاعان المتطرفان والقطاع الواقع فى الوسط أو أن توجد معاليم بها يمكن حسابها

٩١ – وينبغى أن يلاحظ أن القطاع المتوسط لا يكون مساويا فى المساحة للقطاع الواقع فىوسط الطول الا فى حالة ما يكون القطاع الواقع فى الوسط (م) هو المتوسط العددى للقطاعين المتطرفين (ا ، ب)

وذلك لأن القطاع المتوسط = $\frac{1}{6}$ (ا + ب + ٤ م) فاذا كان مساويا للقطاع الواقع فى الوسط (م) توجد المعادلة الآتية

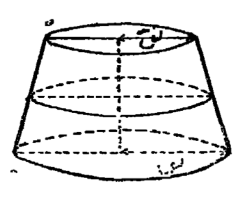
$$\text{م} = \frac{1}{6}(\text{ا} + \text{ب} + ٤\text{م})$$ ومنها

$$\text{م} = \frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})$$

وهذه الحالة البسيطة لا تحصل فى جسم من الأجسام العادية الا فى الأسطوانة والمنشور التى فيها جميع القطاعات العرضية متساوية الا أن هناك خاصية مشابهة لذلك فى حالة بعض أوجه هذه الأقسام كما سيرى فيما يأتى وهناك جسم واحد هو الجسم المكافئى المتولد من الدوران ففى هذه الحالة تطبق القاعدة فى تعيين الحجم وهناك أيضا بعض أحوال مخصوصة من أجسام ناقصة مجوفة فيها القطاع الواقع فى وسط الطول هو أيضا القطاع المتوسط اذ أن كلا منهما بالطبع هو المتوسط العددى للقطاعين المتطرفين كما سبق اثباته آنفا

(القطاعات الواقعة فى الوسط)

المخروط الناقص القائم الدائرى



٩٢ ــ اذا كان نق ، نقَ هما نصفا قطرى قاعدتى مخروط ناقص فنصف قطر القطاع الواقع فى الوسط هو $\frac{1}{2}$ (نق + نقَ) واذن تكون مساحة القطاع المذكور بدلالة نق ، + نقَ اللذين هما نصفا القطرين = $\frac{1}{4}$ط (نق + نقَ)^2

٩٣ ــ اذا كانت المساحتان ا ، ب للقاعدتين معلومتين فمقادير أنصاف الأقطار نق ، نقَ يمكن أن تحسب من القانونين

ط س^٢ = ا ، ط س$'^٢$ = ب واذن يمكن معرفة مساحة القطاع الواقع في الوسط أو يمكننا أن نعين هذه المساحة بدلالة ا ، ب وبذلك نحسب مقـدارها بدون اجراء الحساب الرقمي الذي يعين س ، س$'$ في أول الأمر هكذا

$$س = \sqrt{\frac{ا}{ط}} ، س' = \sqrt{\frac{ب}{ط}}$$

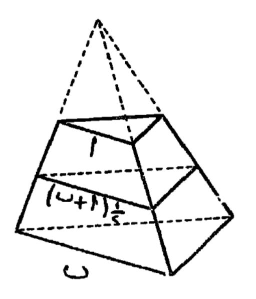
واذن يكون

$$\frac{ط}{٤}(س + س')^٢ = \frac{ط}{٤}\left(\sqrt{\frac{ا}{ط}} + \sqrt{\frac{ب}{ط}}\right)^٢ =$$

$$\frac{١}{٤}\left(\sqrt{ا} + \sqrt{ب}\right)^٢ = \frac{١}{٤}\left(ا + ٢\sqrt{اب} + ب\right)$$

وهذه هي مساحة القطاع الواقع في الوسط بدلالة مساحة القاعدتين

٩٤ — وينبغي أن يلاحظ أنه متى كان ا ، ب معلومين فالعمل الحسابي لتعيين القطاع الواقع في الوسط يمكن اختصاره كثيرا بتعيين مقداره بدلالة ا ، ب بالعلمية الجبرية السابق شرحها بدلا من البدء بتعيين المقادير الرقمية لكل من س ، س$'$ ثم يستعمل القانون الأوضح وهو $\frac{١}{٤}$ ط(س + س$'$)^٢ وبذلك نتجنب عمليتي قسمة على ط ثم الضرب بعد ذلك في هذا العدد ونتجنب أيضا عمليتي جذر تربيعي وعملية تربيع اذ أن اللازم هو ايجاد جذر تربيعي واحد وهو $\sqrt{اب}$ ويجب على الطالب في هذه الطريقة استعمال عمليات جبرية لتقليل الأعمال الحسابية متى كان ذلك ممكنا وترك اللازم منها في نهاية لآخر العملية



٩٥ — الهرم الناقص

ان طريقة ايجاد مساحة القطاع الواقع فى الوسط لهرم مستنبطة من أن قطاعات الهرم الموازية لقاعدته جميعها أشكال متشابهة وعليه فسنرى أن القانون الذى يعين مساحة القطاع الواقع فى الوسط بدلالة مساحتى القاعدتين هو فى الهرم كما فى المخروط وأنه يمكن تطبيقه على أى مخروط ناقص

فليكن ا ، ب هما مساحتا القاعدتين و اَ ، بَ هما ضلعان متناظران من القاعدتين فعليه يكون ا = ك اَ^{٢} ، ب = ك بَ^{٢} (ك رمز لكمية ثابتة فضلع القطاع الواقع فى الوسط الموازى الى اَ بَ هو $\frac{\text{اَ}+\text{بَ}}{٢}$ واذن تكون مساحة هذا القطاع = ك $\left(\frac{\text{اَ}+\text{بَ}}{٢}\right)^{٢}$ =

$$\frac{١}{٤}(\text{ك اَ}^{٢} + ٢\text{ك اَ بَ} + \text{ك بَ}^{٢}) = \frac{١}{٤}(\text{ا} + ٢\sqrt{\text{ا ب}} + \text{ب})$$

٩٦ — وينبغى أن يلاحظ :

(١) أن مساحة القطاع الواقع فى وسط المخروط الناقص أو الهرم الناقص تتعلق فقط بقاعدتى ذلك الجسم الناقص ولا علاقة لها بالارتفاع بالكلية

(٢) وأن مقدارى ا ، ب متماثلان كما يجب أن تكون الحال بالضرورة حيث لا يؤثر على ذلك تسمية أى القاعدتين ا والثانية ب

(٣) وأنه اذا كان ا = ب أى فى حالة ما يؤول المخروط والهرم الى اسطوانة أو منشور فمقدار القطاع الواقع فى الوسط يؤول الى ا أيضا

وهناك ملحوظات مشابهة لما سبق بالنسبة للقانون $\frac{١}{٤}$ ط (نق + نقَ)^{٢}

تمرينات (١٣)

(١) مخروط ناقص قائم نصف قطر قاعدتيه ٣ أمتار ، ٦ أمتار على التناظر والمطلوب معرفة نصف قطر القطاع الواقع فى الوسط ومساحته

(٢) مساحة قاعدتى مخروط ناقص هما ٣٠ ، ١٢٠ مترا مربعا على التناظر والمطلوب معرفة مساحة القطاع الواقع فى الوسط

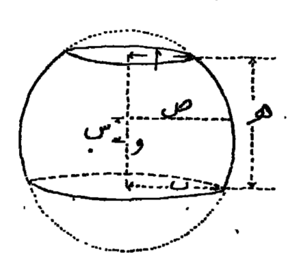
(٣) المطلوب ايجاد مساحة القطاع الواقع فى الوسط لهرم قاعدته معلومة

(٤) المطلوب ايجاد مقدار القطاع الواقع فى الوسط لمخروط ناقص بدلالة المحيطين $م_١$ ، $م_٢$ للقاعدتين الدائرتين للمخروط الناقص المذكور

(٥) اذا كانت قاعدتا هرم ناقص مثلثين وكانت قاعدة كل مثلث تساوى ٢ س ارتفاعه وكان الارتفاعان هما $هـ_١$ ، $هـ_٢$ فما مقدار القطاع العرضى الواقع فى وسط الهرم الناقص المذكور

٩٧ — القطعة القروية الناقصة

ان المسائل التى تستلزم بحثا هندسيا فيما يتعلق بالقطعة الكروية الناقصة المعلوم ارتفاعها هـ ونصفا قطرى قاعدتيهما ا ، ب هى



(١) مساحة القطاع الواقع فى الوسط

(٢) نصف قطر الكرة

(٣) المسافة بين مركز الكرة والقطاع الواقع فى وسط القطعة الكروية الناقصة ولا ضرورة فى تعيين حجم القطعة الكروية الناقصة الى ايجاد الكميتين الأخريين ولكن

يظهر أنه يحسن أن نبين كيفية تعيين تلك الكميات وذلك لنجمع جميع المسائل الهندسية الضرورية فيما يتعلق بالقطعة الكروية الناقصة فى موضع واحد وفضلا عن ذلك فان المعادلات التى تستعمل لتعيين احدى تلك الكميات توصلنا الى تعيينها جميعا

فاذ فرض أن س هو بعد مركز الكرة عن القطاع الواقع فى الوسط وأن ص هو نصف قطر القطاع الواقع فى الوسط وأن ن هو نصف قطر الكرة فبناء على ماهو معلوم فى الهندسة تنتج المعادلات الثلاث الآتية

$$\text{ن}^2 = \text{أ}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\text{هـ} + \text{س}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (١)$$

$$\text{ن}^2 = \text{ب}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\text{هـ} - \text{س}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (٢)$$

$$\text{ن}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (٣)$$

فاذا طرحت معادلة (١) من معادلة (٢) يتحصل س وهو

$$\text{س} = \frac{\text{ب}^2 - \text{أ}^2}{٢\,\text{هـ}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (٤)$$

واذا أضيفت المعادلتان المذكورتان الى بعضهما نجد

$$\text{ن}^2 = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}{٢} + \frac{\text{هـ}^2}{٤} + \text{س}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (٥)$$

واذن يتحصل من معادلة (٣)

$$\text{ص}^2 = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}{٢} + \frac{\text{هـ}^2}{٤} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (٦)$$

وهذه المعادلات (٤) و (٥) و (٦) هى الارتباطات الأصلية التى سنحتاج اليها ويمكن الحصول عليها بأى ترتيب يراد من المقادير الثلاثة للكمية ن² كما ينبغى للطالب أن يتحقق من ذلك وليس من الضرورى تعيين مقدار س ، ن

ولا حاجة للاهتمام بحفظ القوانين الخاصة بمقادير س ، ن² لأنه من السهل استنباطها مباشرة بالرسم وكذلك يمكن ايجاد القانون الخاص بمقدار ص²

الا أنه نظرا لتكرر الاحتياج اليـه أكثر من القانونين الآخرين فمن الصواب أن يحفظ بصفة خاصة واذا ضربنا مقدار ص^2 فى النسبة التقريبية ط فانه يتحصل منه مساحة القطاع الواقع فى الوسط هكذا

$$\text{القطاع الواقع فى الوسط} = \text{ط} \left(\frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{2} + \frac{\text{هـ}^2}{4} \right)$$

٩٨ — وينبغى اختبار هذا القانون بتطبيقه على أحوال خاصة

(١) فلنأخذ الكرة التامة أى لنفرض ا = ب = ٠ ، هـ = ٢ نق فالقانون يؤول الى ط نق^2 الذى هو مساحة دائرة عظيمة من الكرة كما يجب أن يكون الحال

(٢) ولنأخذ شقة رقيقة جدا بأن نفرض ب = ا ، هـ = ٠ فالقانون يؤول الى ط ا^2

(٣) ولنفرض نصف كرة فيها ا = نق ، ب = ٠ ، هـ = نق فالقانون يؤول الى $\frac{3}{4}$ ط نق^2 وهو قانون يتضح بقليل من التأمل أنه صحيح بالنسبة للقطاع الواقع فى وسط نصف الكرة

٩٩ — وينبغى أن يلاحظ أن مساحة القطاع الواقع فى وسط قطعة كروية ناقصة يتعلق بارتفاع القطعة بعكس مساحة القطاع الواقع فى وسط مخروط أو هرم ناقص فانه لايتعلق بالارتفاع

١٠٠ — وينبغى ملاحظة الارتباطين الآتيين وهما مستنتجان من الشكل مباشرة

$$\text{هـ} = \sqrt{\text{نق}^2 - \text{ا}^2} \pm \sqrt{\text{نق}^2 - \text{ب}^2}$$

$$\text{،} \ 2\,\text{س} = \sqrt{\text{نق}^2 - \text{ا}^2} \mp \sqrt{\text{نق}^2 - \text{ب}^2}$$

فالمقداران $\sqrt{نق^{2} - ا^{2}}$ ، $\sqrt{نق^{2} - ب^{2}}$ هما بعدا قاعدتى القطعة الناقصة عن مركز الكرة وتتعلق الاشارة (+ أو −) فى كل حالة يكون مركز الكرة داخل القطعة الكروية الناقصة أو خارجها

واذا ضربنا أحد المقدارين السابقين فى الآخر يكون

$$٢\ س\ هـ = ب^{٢} - ا^{٢}$$

وذلك مطابق لمقدار (٤) السابق استخراجه

١٠١ — القطعة الكروية

اذا كانت القطعة الكروية ذات قاعدة واحدة (وهى القطعة الكروية الناقصة فى حالة ما يكون نصف قطر احدى قاعدتيها يساوى صفرا (فمقدار نصف قطر الكرة يعين بقانون أبسط كثيرا مما فى الحالة المعتادة ويمكن الحصول عليه بأن نضع ب = ٠ فى القانون السابق بيانه لمقدار $نق^{٢}$ ثم تأخذ الجذر التربيعى لطرفى المعادلة أو الأحسن أن يستعمل برهان مستقل كما يأتى

فالمثلثان القائما الزاوية حـ ء ب ، حـ ب ى (أنظر الشكل) متشابهان

وإذن يكون $\frac{حـ ب}{حـ ء} = \frac{حـ ى}{حـ ب}$

وإذن يكون $حـ ى \times حـ ء = حـ ب^{٢}$

أى أن $٢\ نق\ هـ = ا^{٢} + هـ^{٢}$

ويجب على الطالب أن يثبت أى مساحة القطاع الواقع فى وسط القطعة $= ط (\frac{١}{٢} ا^٢ + \frac{١}{٤} هـ^٢)$ وأن البعد سـ للقطاع المتوسط عن مركز الكرة $= ا^٢ \div ٢ هـ$

١٠٢ — وهناك بعض ارتباطات بسيطة تستحق أن يلتفت اليها بين القطعة ا حـ ب والقطعة المكملة ا ى ب

فاذا كان هـ ، هـَ هما ارتفاعا القطعتين و سـ ، سـَ هما بعدا القطاعين الواقعين فى وسطهما عن مركز الكرة فمن السهل أن يرى أن

$$هـَ = ٢ سـ ، ٢ سـَ = هـ$$

لأن $ن = و حـ = سـ + \frac{١}{٢} هـ$

واذن يكون $ى حـ = ٢ سـ + هـ$

ومنها $د ى = ٢ سـ$

أى أن $هـَ = ٢ سـ$

وبمثل ذلك اذا اعتبرت القطع بترتيب عكسى يكون

$$ن = و ى = سـَ + \frac{١}{٢} هـَ$$

واذن يكون $حـ ى = ٢ سـَ + هـَ$

ومنها $حـ د = ٢ سـ$

أى ان $هـ = ٢ سـَ$

وهناك طريقة أخرى للوصول الى القانون

$$٢ ن هـ = ا^٢ + هـ^٢$$

وهى باعتبار الارتفاعين هـ ، هـَ للقطعة ومكملتها التى توفى الارتبـاط

$$هـ + هـَ = ٢ ن ، هـ هـَ = ا^٢$$

واذن يكون هـ ، هـَ هما جذرا المعادلة ذات الدرجة الثانية الآتية

$$هـ^٢ - ٢ ن هـ + ا^٢ = ٠$$

تمرينـات (١٤)

(١) قطعة كروية ارتفاعها أربعة أمتار ونصف قطر قاعدتها ستة أمتار قسمت الى أربعة أقسام ارتفاع كل منها متر بثلاثة مستويات موازية للقاعدة والمطلوب تعيين مسائح القطاعات الحادثة من هذه المستويات القاطعة

(٢) قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٣ أمتار ونصف قطر قاعدتيها ٤ أمتار و ٨ أمتار على التناظر والمطلوب ايجاد نصف قطر القطاع الواقع فى الوسط ونصف قطر الكرة

(٣) قطر احدى قاعدتى قطعة كروية ٥٠ مترا ومحيط قطاعها الذى فى وسط الارتفاع ١٥٤ مترا والمطلوب تعيين ارتفاع القطعة

(٤) المطلوب بيان أن القطاع الواقع فى وسط ارتفاع قطعة كروية ناقصة يزيد عن المتوسط العددى لمسائح قاعدتيها الدائريتين بمقدار مساحة القطاع الواقع فى وسط كرة قطرها يساوى ارتفاع القطعة الكروية الناقصة

(٥) اذا قطعت كرة محدّدة لتجويف كروى بمستويين متوازيين بحيث يخترقان التجويف فالمطلوب اثبات أن مساحة القطاع الواقع فى وسط هذه القطعة الكروية الناقصة هى المتوسط العددى لمساحتى القاعدتين وبيان أن نظرية مسألة (٤) السابقة تنتج من حالة خصوصية لهذه النظرية

(٦) اذا اشتملت كرة على تجويف كروى وقطعت بمستويات موازية للخط الواصل بين مركز الكرة ومركز التجويف فالمطلوب البرهنة على أن جميع هذه القطاعات التى تقطع التجويف متساوية فى المساحة

(٧) اذا اشتملت كرة على تجويف كروى متحد معها فى المركز فالمطلوب اثبات أن جميع القطاعات التى تقطع التجويف متساوية فى المساحة

(٨) المطلوب ايجاد نصف قطر كرة يمكن أن يقطع منها قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٥ سنتيمترات ونصف قطر قاعدتيها ٣ سنتيمترات ، ٤ سنتيمترات على التناظر

(٩) كرة نصف قطرها ١٠ أمتار أخذت منها قطعة كروية ارتفاعها ٥ أمتار ونصف قطر احدى قاعدتيها ٦ أمتار والمطلوب ايجاد نصف القطر الثانى باستعمال القانون ($\text{ه} = \sqrt{\text{ن}^{٢} - \text{ا}^{٢}} \pm \sqrt{\text{ن}^{٢} - \text{ب}^{٢}}$)

(١٠) نصفا قطرى قاعدتى قطعة كروية ناقصة هما ٣٠ سنتيمترا و ٤٠ سنتيمترا على التناظر ونصف قطر الكرة المقطوعة منها تلك القطعة ٥٠ سنتيمترا فما ارتفاع القطعة الكروية الناقصة

(١١) المطلوب ايجاد مساحة دائرة عظيمة فى الكرة التى قطع منها قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ١١ سنتيمترا ونصفا قطرى قاعدتيها ٣ سنتيمترا ب و ٨ سنتيمترات على التناظر وبيان بعد هاتين القاعدتين عن مركز الكرة

(١٢) المطلوب بيان أن $\text{ن}^{٢} = \text{ا}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ اذا كان $\text{ه} = \text{ا} \pm \text{ب}$ ثم ايجاد بعد مركز الكرة عن قاعدتى القطعة فى هذه الحالة

(١٣) المطلوب اثبات أن القطعة الكروية الناقصة تكون كبرى أو صغرى على حسب مايكون $\text{ه}^{٢}$ أكبر أو أصغر من $\text{ب}^{٢} - \text{ا}$

(١٤) المطلوب اثبات أن

$$٢ ى هـ = \sqrt{\{هـ^٢ + (ا + ب)^٢\}\{هـ^٢ + (ا - ب)^٢\}}$$

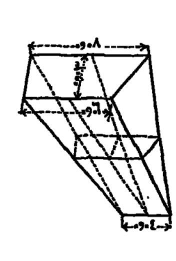
١٠٣ — المنشور الناقص

مساحة القطاع الواقع فى وسط المنشور الناقص تتحصل باعتبار أن كل ضلع من القطاع المذكور هو نصف مجموع الضلعين المناظرين له من قاعدتى المنشور (أنظر بند ١٦) ويكفى قليل من الأمثلة فى هذا

تمرينات (١٥)

(١) خزان قاعدته السفلى مستطيلة طولها ٣٠ مترا وعرضها ٢٠ مترا وقاعدته العليا مستطيلة طولها ٥٠ مترا وعرضها ٤٠ مترا .والمطلوب تعيين مساحة قطاعها الواقع فى الوسط

(٢) خابور قاعدته على شكل شبه منحرف عرضه ٣ سنتيمترات وطول ضلعيه المتوازيين ٦ و ٨ سنتيمترات بالتناظر والضلع المقابل للقاعدة من الخابور ٤ سنتيمترات طولا والمطلوب معرفة مساحة القطاع الواقع فى وسط الخابور الموازى الى قاعدته بملاحظة أن مساحة شبه المنحرف تساوى نصف مجموع الضلعين المتوازيين مضروبا فى المسافة بينهما (أنظر بند ١٦)



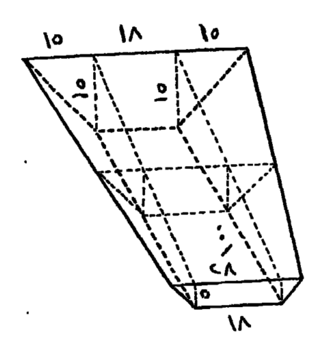
(٣) عرمة من الدريس موضوعة على قاعدة مستطيلة مساحتها ٢٠ مترا × ١٠ أمتار وأبعادها عند مبدأ البروز ٢٤ مترا × ١٤ مترا وطول الحرف الأعلى ١٢ مترا والمطلوب ايجاد مسائح القطاعين الأفقيين فى وسط المسافة بين الأرض والبروز و بين البروز والحرف الأعلى

(٤) جزء من أخدود سكة حديد طول قاعدته الأفقية ١٠٠ متر وعرضها ١٨ مترا على شكل منشور ناقص ميل جوانبه ٤٥° على الأفق وله وجهان رأسيان على شكل منحرف وارتفاع الوجهين المذكورين ١٥ مترا و ٥ أمتار على التناظر والمطلوب ايجاد مسائح الوجهين الرأسيين المذكورين والقطاع الواقع فى وسط طوله

(٥) المطلوب بيان أن هذا المنشور الناقص يمكن قسمته الى جزء متوسط قطاعاته العرضية مستطيلات عرضها ١٨ مترا وهرمين ناقصين قطاعاتهما العرضية مثلثات قائمة الزاوية متساوية الساقين ثم ايجاد مسائح القطاعات التى فى وسط كل من هذه الأقسام الثلاثة

(٦) المطلوب ايجاد مقدار القطاع الواقع فى وسط أخدود منشورى ناقص مثل المتقدم حينما يكون عرض القاعدة ٢ أ وارتفاعا الوجهين هـ ١ ، هـ ٢

(٧) المطلوب بيان مقدار القطاع الواقع فى وسط أخدود حينما لا يكون ميل جوانبه على الأفق ٤٥° بل حينما يكون ظل تمام تلك الزاوية يساوى س



(٨) المطلوب ايجاد مسائح القطاعين المتطرفين للشكل المنشورى الناقص المبين فى الرسم والقطاع الواقع فى وسطه بمعلومية الأبعاد الآتية للطرفين المستطيلين أ ب = ١٠ أمتار ، ب حـ = ٣٠ مترا ، ى ف = ٥٠ مترا ، ى هـ ١٠ أمتار

(٩) اذا كان الوجهان ا ى هـ ء ، ب ف ج حـ للمنشور الناقص السابق ذكره ممدودين الى أن يتقابلا فى خط بطول قدره ن وامتد الوجهان ا ب ف ى ، ء حـ ج هـ الى أن يتقابلا فى خط طوله ك فالمطلوب ايجاد مساحة القطاع الواقع فى وسط الجسم المتكون بهذه الكيفية

ى ف هـ ج ا ب ء ح

(١٠) المطلوب ايجاد مساحة القطاع الواقع فى وسط الجسم المذكور فى المسئلة السابقة (الذى هو جسم ذو أربعة أوجه ثلاثيـة مسـتوية)

بفرض أن ن = ٣٥ مترا ك = ٧٠ مترا

القطاعات المتوسطة والأجسام

١٠٤ — لا يجد الطالب صعوبة الآن فى تعيين القطاع المتوسط لأى جسم من الأجسام السابق شرحها بتطبيق القانون المنشورى الذى به

القطاع المتوسـط = $\frac{1}{6}$ (مجموع القطاعين المتطرفين + أربعة أمثـال القطاع الواقع فى الوسط)

والحجم يعين بعـد ذلك بضرب القطاع المتوسـط فى ارتفاع الجسم أى فى المسافة العمودية بين القطاعين المتطرفين وفى حالة تكون الجسم من أجزاء مختلفة الشكل كما اذا كان مكونا من مخروط فوق قطعة كروية أو عرمة الدريس التى فى المسألة (٣) من تمرينات (١٥) السابقة فكل جزء يحسب وحده وتضم الأحجام الجزئية على بعضها

وننصح للطالب أن يدرس الجدول الآتى باعتناء فيجد القـانون الخاص بالقطاع المتوسط فى كل حالة بتطبيق القانون الأساسى السابق ذكره

وصف الجسم	الارتفاع	مساحة القطاعين المتطرفين	مساحة القطاع الواقع في وسط الجسم	مساحة القطاع المتوسط	ملحوظات
مخروط	لا أهمية للارتفاع في تعيين القطاع المتوسط	ط نق^{٢} ، ٠	$\frac{١}{٤}$ ط نق^{٢}	ط نق^{٢}	في كل من هذه الأحوال يكون القطاع الواقع في وسط الجسم أصغر من القطاع المتوسط الا اذا كان القطاعان المتطرفان متساويين وفي هذه الحالة يكون الجسم اسطوانة أو منشورا وجميع القطاعات العرضية متساوية
مخروط أو هرم		ا ، ٠	$\frac{١}{٤}$ ا	$\frac{١}{٣}$ ا	
مخروط ناقص		ط نق^{٢} ، ط نق$'^{٢}$	$\frac{ط}{٤}$(نق + نق$'$)^{٢}	$\frac{ط}{٣}$ {(نق^{٢} + نق$'$ ... نق$'$ − نق$'$)^{٢}}	
مخروط ناقص أو هرم ناقص		ا ، ب	$\frac{١}{٤}$($\sqrt{ا}$ + $\sqrt{ب}$)^{٢}	$\frac{ا + \sqrt{ا ب} + ب}{٣}$	
كرة	٢ نق = ق	٠ ، ٠	ط نق^{٢} = $\frac{ط ق^{٢}}{٤}$	$\frac{٢}{٣}$ ط نق^{٢} = $\frac{ط ق^{٢}}{٦}$	في كل من هذه الأحوال يكون القطاع الواقع في وسط الجسم أكبر من القطاع المتوسط ومقدار الزيادة يساوي $\frac{ط هـ^{٢}}{١٢}$
نصف كرة	نق	ط نق^{٢} ، ٠	$\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٢}	$\frac{٢}{٣}$ ط نق^{٢}	
قطعة كروية	هـ	ط ا^{٢} ، ٠	ط($\frac{ا^{٢}}{٢}$ + $\frac{هـ^{٢}}{٤}$)	ط($\frac{ا^{٢}}{٢}$ + $\frac{هـ^{٢}}{٦}$)	
قطعة كروية ناقصة	هـ	ط ا^{٢} ، ط ب^{٢}	ط($\frac{(ا^{٢} + ب^{٢})}{٢}$ + $\frac{هـ^{٢}}{٤}$)	ط($\frac{ا^{٢} + ب^{٢}}{٢}$ + $\frac{هـ^{٢}}{٦}$)	
قطعة كروية ناقصة مشتملة على تجويف كروي قطره يساوي ارتفاع القطعة الناقصة	غير مهم	ط ا^{٢} ، ط ب^{٢}	$\frac{ط}{٢}$ (ا^{٢} + ب^{٢})	$\frac{ط}{٢}$ (ا^{٢} + ب^{٢})	القطاع الواقع في وسط هذا الجسم هو أيضا القطاع المتوسط وكل منهما هو المتوسط الحسابي القطاعين المتطرفين
قطعة من مجسم قطع مكافئ تحركي	شرحه	شرحه	شرحه	شرحه	شرحه
قطعة كروية ناقصة مجوفة		ط (نق$_{١}^{٢}$ − نق$_{٢}^{٢}$)	ط (نق$_{١}^{٢}$ − نق$_{٢}^{٢}$)	ط (نق$_{١}^{٢}$ − نق$_{٢}^{٢}$)	جميع القطاعات التي تقطع التجويف متساوية في المساحة

١٠٥ — وفى البنود الآتية سنثبت أن حاصل ضرب الارتفاع فى القطاع المتوسط المتحصل بواسطة القانون المنشورى يعطى الحجم المضبوط فى حالة الأجسام البسيطة ويتعلق الاثبات بالأمور الآتية :

(١) ان قانون القطاع المتوسط يعطى حقيقة متوسطا صحيحا لشقة رقيقة مقطوعة بمستويين موازيين للقطاعين المتطرفين وذلك لأن القطاعين المتطرفين لشقة رقيقة متساويان تقريبا ومساويان للقطاع الواقع فى وسط تلك الشقة والقانون فى هذه الحالة يجعل القطاع المتوسط مساويا للقطاع المتطرف كما هو اللازم أن يكون

(٢) واذا لم يعط القانون الا مقدارا تقريبيا لحجم شقة غليظة فيمكن الحصول على تقريب أعظم بقسمة الشقة السميكة الى شقق متعددة رقيقة وتطبيق القانون على كل واحدة منها ثم اضافة الأحجام الجزئية الى بعضها وعليه فاذا لم تختلف نتيجة هذه الطريقة عن نتيجة القانون السابق فان القانون المذكور يكون مضبوطا وليس تقريبيا فقط وسنطبق ذلك على المخروط الناقص والقطعة الكروية الناقصة والأجسام الأخرى

١٠٦ — المخروط الناقص

ليكن أ ، ب نصفى قطرى قاعدتى المخروط و حـ نصف قطر القطاع الواقع فى وسط الارتفاع بحيث يكون ٢ حـ = أ + ب وليكن هـ هو ارتفاع المخروط الناقص

فبمقتضى القانون يكون الحجم مساويا

$$\text{هـ} \times \frac{\text{ط أ}^2 + \text{٤ ط حـ}^2 + \text{ط ب}^2}{٦} = \text{هـ} \times \frac{\text{ط أ}^2 + \text{ط أ ب} + \text{ط ب}^2}{٣}$$

فاذا قسم المخروط الناقص الى قسمين ارتفاع كل منهما $\frac{١}{٢}$ هـ فان القانون نفسه يعطى الحجم هكذا :

$$\frac{١}{٢}\text{هـ} \left(\frac{\text{ط أ}^2 + \text{ط أ حـ} + \text{ط حـ}^2}{٣} + \frac{\text{ط حـ}^2 + \text{ط حـ ب} + \text{ط ب}^2}{٣} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{هـ} \left(\frac{\text{ط}\,\text{أ}^{2} + \text{ط}\,\text{حـ}\,(\text{أ} + \text{ب}) + ٢\,\text{ط}\,\text{حـ}^{2} + \text{ط}\,\text{ب}^{2}}{٣} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{هـ}\,\frac{\text{ط}\,\text{أ}^{2} + ٤\,\text{ط}\,\text{حـ}^{2} + \text{ط}\,\text{ب}^{2}}{٣}$$

وهذا مثل ما سبق

وعلى ذلك اذا قسم كل جزء من هذه الأجزاء الى قسمين ثم كل جزء منها الى قسمين وهكذا فان مقدار الجحم الكلى المتحصل بضم الأحجام الجزئية المتحصلة بمقتضى القانون لا يتغير

وبما أن الطريقة الأدق لا تعطى نتيجة مخالفة فيجب أن يكون القانون مضبوطا بالنسبة للقطع السميكة متى كان مضبوطا بالنسبة للقطع الرقيقة التى تبين أن الحال كذلك بالنسبة لها

وبمثل ذلك يمكن البرهان على أن القانون مضبوط بالنسبة للهرم الناقص

ومن الواضح أن هذا القانون مضبوط بالنسبة للهرم التام والمخروط التام لأن الهرم التام والمخروط التام ليسا الا حالة خاصة من المخروط والهرم الناقصين وهو بالنسبة لكليهما كما يأتى :

الحجم $= \frac{1}{٣}$ القاعدة × الارتفاع (١)

١٠٧ — القطعة الكروية الناقصة

اذا أخذنا بالمعالم السابقة يكون $\text{ط}\,\text{حـ}^{2} = \text{ط}\,\frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}{٢} + \frac{\text{ط}\,\text{هـ}^{2}}{٤}$

ويكون القانون المنطبق على القطعة الكروية الناقصة بتمامها الذى يعين الحجم هو

$$\text{هـ} \left(\text{ط}\,\frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}{٢} + \frac{\text{ط}\,\text{هـ}^{2}}{٦} \right)$$

---

(١) ان القانون الذى يعطى حجم هرم ثلاثى تام يمكن الحصول عليه بمقتضى ما هو مقرر فى اقليدس حيث تبين أن المنشور يمكن قسمته الى ثلاثة اهرام متساوية ويمكن بيان القانون بالنسبة الى أى هرم آخر أو مخروط بملاحظة أنه مكوّن من جملة اهرام مثلثية .

وبتطبيق القانون على جزأى الكرة الناقصة اللذين ارتفاع كل منهما $\frac{1}{2}$ هـ يكون الحجم مساويا الى :

$$\frac{1}{2}\,\text{هـ}\left(\text{ط}\,\frac{\text{أ}^2+\text{هـ}^2}{2}+\frac{\text{ط هـ}^2}{24}+\text{ط}\,\frac{\text{حـ}^2+\text{ب}^2}{2}+\frac{\text{ط هـ}^2}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\text{هـ}\left(\text{ط}\,\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{2}+\text{ط حـ}^2+\frac{\text{ط هـ}^2}{12}\right)$$

وهذا المقدار اذا أدخل فيه مقدار حـ^2 يؤول الى

$$\frac{1}{2}\,\text{هـ}\left\{\text{ط}\left(\text{أ}^2+\text{ب}^2\right)+\frac{\text{ط هـ}^2}{3}\right\}$$

$$=\text{هـ}\left(\text{ط}\,\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{2}+\frac{\text{ط هـ}^2}{6}\right)$$

كما تقدم

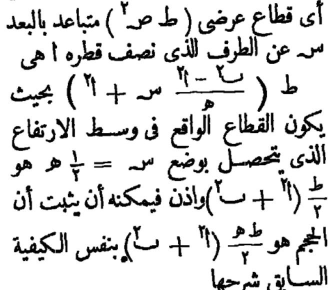
واذن فبمراعاة الأسباب السابقة كما فى حالة المخروط الناقص فان القانون يعطى الحجم بالضبط

ويكون القانون المعين لحجم الكرة التامة.

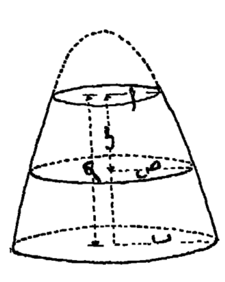
الحجم $=\frac{4}{3}$ ط نق^3 $=\frac{1}{6}$ ط $(\text{القطر})^3$

١٠٨ — المجسم المكافئ

ان الطالب الذى درس الهندسة التحليلية يمكنه أن يثبت بسهولة أن مساحة

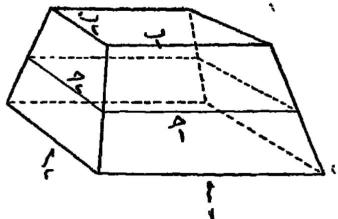


أى قطاع عرضى (ط ص^2) متباعد بالبعد س عن الطرف الذى نصف قطره ا هى ط $\left(\frac{\text{ب}^2-\text{أ}^2}{\text{هـ}}\,\text{س}+\text{أ}^2\right)$ بحيث يكون القطاع الواقع فى وسط الارتفاع الذى يتحصل بوضع س $=\frac{1}{2}$ هـ هو $\frac{\text{ط}}{2}\left(\text{أ}^2+\text{ب}^2\right)$ واذن فيمكنه أن يثبت أن الحجم هو $\frac{\text{ط هـ}}{2}\left(\text{أ}^2+\text{ب}^2\right)$ بنفس الكيفية السابق شرحها



١٠٩ — المنشور الناقص

ان ضبط القانون المنشورى فى تعيين حجم منشور ناقص يمكن اثباته بالطريقة عينها



لنفرض أن ارتفاع الجسم المنشورى الناقص هو ه وأن القطاع العرضى مستطيل

وليكن $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ هما طولا ضلعى القاعدة السفلى ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ هما ضلعا القاعدة العليا ، $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ هما ضلعا القطاع الواقع فى الوسط بحيث يكون

$$٢\,ح_{١} = ا_{١} + ب_{١} \text{ ، } ٢\,ح_{٢} = ا_{٢} + ب_{٢}$$

فالقانون حينئذ يعطى

$$\text{الحجم} = ه\,\frac{ا_{١}ا_{٢} + ٤\,ح_{١}ح_{٢} + ف_{١}ب_{٢}}{٦}$$

$$= ه\,\frac{ا_{١}ا_{٢} + (ا_{١} + ب_{١})(ا_{٢} + ب_{٢}) + ب_{١}ب_{٢}}{٦}$$

$$= ه\,\frac{٢\,ا_{١}ا_{٢} + ا_{١}ب_{٢} + ا_{٢}ب_{١} + ٢\,ب_{١}ب_{٢}}{٦}$$

فاذا قسمنا هـذا الجسم الى جسمين منشوريين ارتفاع كل منهما $\frac{١}{٢}$ ه فيتحصل المقدار الآتى للحجم

$$\frac{١}{٢}ه\left(\frac{٢\,ا_{١}ا_{٢} + ا_{١}ح_{٢} + ا_{٣}ح_{١} + ٣\,ح_{١}ح_{٢}}{٦} + \frac{٢\,ب_{١}ب_{٢} + ب_{١}ح_{٢} + ب_{٢}ح_{١} + ٢\,ح_{١}ح_{٢}}{٦}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{هـ}\,\frac{2\,\text{ا}_1\text{ا}_2 + (\text{ا}_1+\text{ب}_1)\text{حـ}_2 + (\text{ا}_2+\text{ب}_2)\text{حـ}_1 + 4\,\text{حـ}_1\text{حـ}_2 + 2\,\text{ب}_1\text{ب}_2}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{هـ}\,\frac{2\,\text{ا}_1\text{ا}_2 + 2\,\text{حـ}_1\text{حـ}_2 + 2\,\text{حـ}_1\text{حـ}_2 + 4\,\text{حـ}_1\text{حـ}_2 + 2\,\text{ب}_1\text{ب}_2}{6}$$

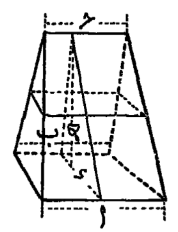
$$= \text{هـ}\,\frac{\text{ا}_1\text{ا}_2 + 4\,\text{حـ}_1\text{حـ}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_1}{6} \quad \text{كما سبق}$$

واذن فبمراعاة الأسباب السابقة كما فى حالة المخروط الناقص فان هذا القانون يعطى الحجم بالضبط

وبمثل ذلك يمكن اثبات أن هذا القانون مضبوط بالنسبة للأجسام المنشورية ذات القطاعات العرضية المخالفة لذلك

١١٠ — قانون حجم الخابور

ان حجم الخابور يمكن أن يتحصل من القانون المنشورى ولكن يمكن الحصول على قانون أبسط بالطريقة الآتية



ليكن ا ، ب ، حـ هى أطوال الحروف المتوازية من الخابور وليكن ء هو البعد العمودى بين ا ، ب وليكن هـ هو البعد العمودى للحرف حـ عن المستوى الشامل لكل من ا ، ب الذى نطلق عليه اسم قاعدة الخابور فتكون مساحة القاعدة هى $\frac{1}{2}$ ء (ا + ب)

ولأجل ايجاد مساحة القطاع الواقع فى الوسط الموازى للقاعدة يلزم أن يلاحظ أنها شبه منحرف عرضه $\frac{1}{2}$ ء وأن ضلعيه المتوازيين هما $\frac{1}{2}$ (ا + حـ) ، $\frac{1}{2}$ (ب + حـ) على التناظر واذن تكون

$$\text{مساحة القطاع الواقع فى الوسط} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ء}}{2}\left(\frac{\text{ا}+\text{حـ}}{2} + \frac{\text{ب}+\text{حـ}}{2}\right)$$

$$= \frac{\text{ء}}{4} \times \frac{\text{ا}+\text{ب}+2\,\text{حـ}}{2}$$

واذن فمن القانون المنشورى يكون

القطاع المتوسط $= \frac{١}{٦} \{ \frac{ء}{٢} (ا + ب) + \frac{ء}{٢} (ا + ب + ٢ح) + ٠ \}$

$= \frac{ء}{٦} (ا + ب + ح)$

واذن يكون

الجم $= \frac{ءهـ}{٦} (ا + ب + ح)$

$= \frac{ءهـ}{٢} \times \frac{ا + ب + ح}{٣}$

وحيث ان القطاع العرضى للخابور بالتعامد على أحرفه الثلاثة ا ، ب ، ح هو مثلث مساحته $= \frac{١}{٢}$ ء هـ والمتوسط الحسابى للأحرف ا ، ب ، ح هو $\frac{١}{٣} (ا + ب + ح)$ فيكون

حجم الخابور يساوى المتوسط الحسابى للأحرف الثلاثة المتوازية مضروبا فى مساحة القطاع العرضى العمودى على هذه الأحرف

وفى الحالة الخصوصية التى يتساوى فيها ا ، ب ، ح يكون الخابور منشورا طوله ا وقطاعه العرضى $\frac{ءهـ}{٢}$

وعلى ذلك يكون حجم الخابور مساويا لحجم المنشور المتحد معه فى مساحة القطاع العرضى والذى طوله هو المتوسط العددى للحروف الثلاثة المتوازية للخابور

تحقيق آخر لقانون القطعة الكروية الناقصة والمخروط الناقص

١١١ — ينبغى أن يلاحظ أن الكميات التى بصورة ا ، ب ، هـ التى يشتمل عليها القطاع الواقع فى وسط الارتفاع والقطاع المتوسط للمخروط الناقص والقطعة الكروية الناقصة هى مضاعفات للكميات $ا^٢$ ، ا ب ، $ب^٢$ ، $هـ^٢$ التى هى جميعها مقادير مسطحات أى ذات بعدين وأن ا هـ ، ب هـ التى هى أيضا ذات بعدين لا تدخل فى تلك المقادير ويمكن أن يتذكر الطالب أى الحدود هى التى لا توجد وذلك بملاحظة أن المساحة المعينة بالمقادير ا هـ

، ب ه يجب أن توجد فى مستو مواز للمحور ه للمخروط الناقص أو القطعة الكروية الناقصة بحيث أنه لا يحتمل أن توجد تلك الحواصل من أول الأمر فى قانون مبين لقطاع مستويه عمودى على هذا المحور وفى الواقع ونفس الأمر أن هذا الخطأ فى الاتجاهات يجعل وجود هذه الحدود مستحيلا واذن فالحدود ذات الدرجة الثانية التى يمكن أن توجد فى مقادير القطاعات الواقعة فى وسط الارتفاع والقطاعات المتوسطة هى أربعة فقط وهى ا٢ ، ا ب ، ب٢ ، ه٢ و بسبب التماثل يكون من الواضح أن معاملات المقدارين ا٢ ، ب٢ يلزم أن تكون متساوية لأنه لا فرق بين جعل أحد نصف القطرين هو ا والثانى هو ب أو عكس ذلك وبناء على ذلك تندرج جميع القوانين فى هذا القانون العام وهو

ل (ا٢ + ب٢) + م ا ب + ن ه٢

و بمراعاة الأحوال الخصوصية يمكن معرفة المعاملات ل ، م ، ن فى المخروط الناقص والقطعة الكروية الناقصة بشرط أن نعرف القوانين الخاصة بالمخروط التام والكرة التامة

١١٢ — وعلى ذلك فلنفرض أننا نريد تعيين مقادير ل ، م ، ن التى بمقتضاها تعين الكميات ل (ا٢ + ب٢) + م ا ب + ن ه٢ القطاع العرضى المتوسط للمخروط الناقص

(١) لنأخذ حالة المخروط التام بأن نضع ب = ٠ . وحجم المخروط = ١/٣ ط ا٢ ه وعلى ذلك يكون قطاعه العرضى المتوسط ١/٣ ط ا٢ ويؤول القانون الى ل ا٢ + ن ه٢

ومن هنا يكون

ل = ١/٣ ط ، ن = ٠ .

(٢) لنأخذ شقة رقيقة أو لنفرض أن المخروط قد آل الى اسطوانة ففى كلتا الحالتين ب = ا والقطاع المتوسط يلزم أن يكون ط ا٢

و يصير القانون (٢ ل + م) أ^{٢}

واذن يكون ٢ ل + م = ط

لكن ل = $\frac{١}{٣}$ ط

فيكون م = $\frac{١}{٣}$ ط

واذن يكون القانون المبين للقطاع العرضى المتوسط لمخروط ناقص هو $\frac{١}{٣}$ ط (أ^{٢} + ا ب + ب^{٢})

١١٣ — ثم انه لأجل ايجاد مقادير ل ، م ، ن التى فيها يكون المقدار العام بعينه مبينا للقطاع العرضى المتوسط لقطعة كروية ناقصة :

(١) نأخذ الكرة التامة التى قطاعها العرضى المتوسط هو $\frac{٢}{٣}$ ط نق^{٢} كما نعلم وفيه ا = ٠ ، ب = ٠ ، هـ = ٢ نق واذن يؤول القانون ل (أ^{٢} + ب^{٢}) + م ا ب + ن هـ^{٢} الى ٤ ن نق^{٢}

ويكون ٤ ن = $\frac{٢}{٣}$ ط

أى أن ن = $\frac{١}{٦}$ ط

واذن يكون الحد المشتمل على هـ^{٢} مساويا الى $\frac{١}{٦}$ ط هـ^{٢} الذى هو القطاع المتوسط للكرة التى قطرها هـ كما هو ظاهر

(٢) نأخذ نصف الكرة التى قطاعها العرضى المتوسط هو أيضا $\frac{٢}{٣}$ ط نق^{٢} فهنا ا = نق ، ب = ٠ ، هـ = نق واذن يؤول القانون الى

ل نق^{٢} + $\frac{١}{٦}$ ط نق^{٢}

واذن يكون ل + $\frac{١}{٦}$ ط = $\frac{٢}{٣}$ ط

ومنه ل = $\frac{١}{٢}$ ط

(٣) نأخذ شقة رقيقة أى نضع ب = ا ، هـ = ٠ . فالقطاع هو $ط\,ا^{٢}$ وهذا على حسب القانون يساوى $\frac{١}{٢}$ ط $(ا^{٢} + ا^{٢})$ + م $ا^{٢}$ واذن يلزم أن يكون م = ٠ . واذن ينتج أخيرا أن القانون المضبوط هو

$$\frac{١}{٢}\,ط\,(ا^{٢} + ب^{٢}) + \frac{١}{٦}\,ط\,هـ^{٢}$$

١١٤ — وبطريقة مشابهة لذلك يمكن استنتاج القوانين الخاصة بالقطاعات الواقعة فى وسط الارتفاع وقد تركنا ذلك للطالب ليقوم به كتمرين له

تمرينات (١٦)

(١) أثبت أنه فى جميع الأجسام التى ينطبق عليها قانون سمبسون تكون مساحة القطاع المتوسط محصورة بين مساحة القطاع الواقع فى الوسط والمتوسط الحسابى لمساحة القاعدتين

(٢) أثبت أيضا أن الفرق بين القطاع المتوسط والمتوسط العددى للقطاعين المتطرفين هو ضعف الفرق بين القطاع الواقع فى وسط الارتفاع والقطاع المتوسط ووضح ما ذكر فى (١) الكرة و (٢) المخروط

(٣) أثبت أنه اذا كان القطاعان المتطرفان كل منهما مساو للصفر فان القطاع المتوسط يساوى $\frac{٢}{٣}$ القطاع الواقع فى وسط الارتفاع

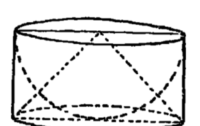
(٤) المطلوب ايجاد حجم كرة نصف قطرها ٥ أمتار

(٥) المطلوب اقامة البرهان الهندسى على أن المنشور الثلاثى يمكن أن يقسم الى ثلاثة أهرام متساوية

(٦) المطلوب اثبات أن حجم المخروط ثلث حجم الاسطوانة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع

(٧) أثبت أنه اذا كان مخروط ونصف كرة واسطوانة متحدة فى القاعدة والارتفاع فالنسبة بين أحجامها تكون كنسبة ١ : ٢ : ٣

(٨) أثبت أنه اذا اتحدت قاعدة نصف كرة مع اسطوانة ارتفاعها كنصف قطر الكرة واتحدت قاعدة مخروط ارتفاعه كالارتفاع السابق مع القاعدة الثانية للاسطوانة بحيث تشتمل الاسطوانة على نصف الكرة والمخروط فان قطاعى نصف الكرة والمخروط الحادثين من أى مستو مواز للقاعدة يساوى مجموعهما القطاع العرضى للاسطوانة



(٩) استخرج من نظرية السؤال السابق قانون حجم الكرة بناء على قانون حجم المخروط

(١٠) احسب حجم قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٥ أمتار وأنصاف أقطار قاعدتيها هما ٣ أمتار ٥ أمتار على التناظر

(١١) أثبت أن القطاع المتوسط لقطعة كروية ناقصة يزيد على المتوسط الحسابى للقاعدتين بمساحة القطاع المتوسط لكرة قطرها ارتفاع هذه القطعة

(١٢) أثبت أن حجم القطعة الكروية الناقصة يزيد على المتوسط الحسابى لحجم أسطوانتين قواعدهما كقواعد القطعة الكروية وارتفاعهما يساوى ارتفاعها بقدر حجم الكرة التى قطرها يساوى هذا الارتفاع

(١٣) المطلوب معرفة حجم قطعة كروية ناقصة مجوفة ارتفاعها ٣ سنتيمترات والسطحان الداخل والخارج لها هما جزآن من كرتين متحدتين فى المركز وقطرهما ١٢ سنتيمترا و ١٠ سنتيمترات على التناظر

(١٤) المطلوب معرفة حجم كرة مجوّفة نصف قطريها الداخل والخارج هما ٨ أمتار و ١٠ أمتار على التناظر ومعرفة حجم كل من القطعتين الكرويتين والقطعة الكروية الناقصة المجوّفة التى تنقسم اليها الكرة بمستويين متوازيين مماسين بالضبط للسطح الداخل والمطلوب معرفة كل حجم من هذه الأحجام على حدته ثم امتحان النتيجة بالأمر المعلوم من أن مجموع الأحجام يساوى الحجم الكلى للكرة

(١٥) المطلوب بيان أنه اذا أحيل مكعب مصنوع من مادة عجينية الى كرتين متساويتين فان قطر الكرة الواحدة يقرب من ضلع المكعب

(١٦) المطلوب اثبات أنه اذا قطع من مكعب كرة قطرها كضلعه فان الحجم المحذوف يقرب من نصف حجم المكعب

(١٧) المطلوب معرفة مجموع حجم كرتين متساويتين قطر كل منهما متر واحد

(١٨) المطلوب معرفة قطر كرة حجمها نصف متر مكعب

(١٩) المطلوب امتحان قانون القطاع الواقع فى وسط ارتفاع مخروط ناقص بتطبيقه (١) على مخروط تام (٢) على اسطوانة أو شقة رقيقة من المخروط

(٢٠) المطلوب امتحان قانون القطاع الواقع فى وسط الارتفاع لقطعة كروية ناقصة بتطبيقه على (١) كرة تامة (٢) شقة رقيقة منها

(٢١) بمعرفة أن حجم المخروط يساوى ثلث قاعدته مضروبا فى ارتفاعه المطلوب ايجاد قانون حجم المخروط الناقص باعتباره فرق مخروطين وطبق ذلك على مخروط ناقص ارتفاعه ٣٠ مترا وقطرا قاعدتيه ٤ أمتار و ١٠ أمتار على التناظر

(٢٢) المطلوب اثبات أن حجم المخروط النـاقص يزيد على حجم أسطوانة متحدة معه فى الارتفاع وقطاعها العرضى يسـاوى القطاع الواقع فى وسط ارتفاع المخروط الناقص بمقدار يساوى حجم مخروط متحد معهما فى الارتفاع ونصف قطر قاعدته نصف الفرق بين نصف قطرى قاعدتى المخروط الناقص

(٢٣) المطلوب اثبات أن حجم المخروط يزيد بقدر الثلث عن حجم الاسطوانة التى قطاعها العرضى يساوى القطاع العرضى الواقع فى وسط ارتفاع المخروط

(٢٤) أثبت أنه اذا حسب حجم مخروط ناقص باعتبار أن القطاع المتوسط مساو للقطاع الواقع فى وسط ارتفاعه فالخطأ يساوى $\frac{1}{3}\left(\frac{ى - ى'}{ى + ى'}\right)^2$ من الحجم المحسوب بحيث انه اذا رمز للخطأ النسبى بالرمز ے وللحجم المحسوب بالرمز ح فالحجم الصحيح يساوى

$$ح\,(ے + ١)$$

(٢٥) ما هو الخطأ النسـبى فى المسألة السابقة (١) اذا كان قطر احدى القاعدتين ثلاثة أمثال القاعدة الأخرى (٢) اذا كان قطر احدى القاعدتين ضعف قطر الأخرى

(٢٦) اذا كان نصف قطرى قاعدتى مخروط ناقص هو ٢٠ مترا و ٣٠ مترا بالتناظر والحجم المحسوب بفرض أن القطاع المتوسط هو المار بوسط الارتفاع يساوى ٣٠,٠٠٠ مترا مكعبا فما مقدار الخطأ النسبى وما هو الحجم الحقيقى

(٢٧) ما هو ارتفاع المخروط الناقص المذكور فى المسألة السابقة

(٢٨) بيـن أن بعد رأس مخروط عن القطاع الواقع فى وسط ارتفاع مخروط ناقص من هذا المخروط يساوى $\frac{1}{2}\, ه\, \frac{ى + ى'}{ى - ى'}$

(٢٩) اذا كان ى هى نصف زاوية رأس مخروط فالمطلوب اثبات أن حجم المخروط الناقص = $\frac{ط}{٣}$ (ب^{٣} − ا^{٣}) جتا ى وفى هذا المقدار ب ، ا هى أنصاف أقطار قاعدتى المخروط الناقص

(٣٠) أثبت أنه اذا قسم مخروط ناقص الى قسمين متساويى الحجم بمستو مواز لقاعدتيه وكان ا ، ب أنصاف أقطار قاعدتيه ، حـ نصف قطر المستوى القاطع فانه يكون حـ^{٣} = $\frac{١}{٢}$ (ا^{٣} + ب^{٣})

(٣١) المطلوب ايجاد حجم عوّامة مركبة من مخروط مرتكز على نصف كرة وارتفاع المخروط مساو لنصف قطر الكرة وكل منهما ٠٫٦٠ متر

(٣٢) عوامة مركبة من قطعة كروية وفوقها مخروط وارتفاع المخروط ٣٫٦٠ أمتار ونصف قطر القاعدة المشتركة بين القطعة الكروية والمخروط ١٫٥٠ متر والارتفاع الكلى للعوّامة هو ٦ أمتار والمطلوب معرفة مقدار الحجم

(٣٣) نصف كرة قسمت الى أربعة أقسام متساوية فى السمك بثلاثة مستويات مرسومة بالتوازى لقاعدة نصف الكرة والمطلوب معرفة أحجام الأجزاء اذا كان نصف قطر الكرة ١٢ مترا

(٣٤) المطلوب بيان مقدار حجم قطعة كروية ناقصة معلوم ارتفاعها ومحيط كل من قاعدتيها

(٣٥) المطلوب بيان حجم قطعة كروية ناقصة بدلالة القطاع الواقع فى وسط الارتفاع وارتفاعها

(٣٦) المطلوب اثبات أن جميع القطع الكروية الناقصة المتحدة فى الارتفاع وفى القطاع الواقع فى وسط الارتفاع متساوية فى الحجم مهما كان نصف قطر الكرة التى قطعت منها

(٣٧) المطلوب اثبات أن حجم القطعة الكروية بدلالة ارتفاعها (هـ) ونصف القطر (ى) للكرة المأخوذة منها القطعة يساوى ط هـ^{٢} (ى — $\frac{١}{٣}$ هـ)

(٣٨) بين أن حجم القطاع الكروى بدلالة نصف قطر الكرة وارتفاع القطعة الكروية التى تكون قاعدة القطاع المذكور يساوى $\frac{٢}{٣}$ ط ى^{٢} هـ

(٣٩) المطلوب معرفة حجم الجزء المخروطى من القطاع الكروى

(٤٠) المطلوب معرفة حجم القطاع الكروى والجزء المخروطى من القطاع بدلالة الارتفاع ونصف قطر قاعدة القطعة الكروية التى تكون قاعدة القطاع

(٤١) المطلوب اثبات أن حجم القطاع الكروى يساوى حجم مخروط ارتفاعه يساوى نصف قطر الكرة وقاعدته تساوى ط (أ^{٢} + هـ^{٢})

(٤٢) مخروط صلب ارتفاعه يساوى نصف قطر قاعدته ثبتت قاعدته فى قاع اناء اسطوانى مساوله فى نصف قطر القاعدة وفى الارتفاع وكان لدينا اناء شكله نصف كرة نصف قطره مثل نصف قطر الاسطوانة والمخروط مشتمل على ماء ارتفاعه فيه يساوى هـ فاذا صب الماء فى الاناء الأسطوانى المشتمل على المخروط فما هو الاوتفاع الذى يصل اليه الماء

(٤٣) المطلوب ايجاد حجم الماء الذى يمكن أن يحويه خزان عمقه ١٠ أمتار ومقاسه من أعلى ٤٠ مترا × ٣٠ مترا وأضلاعه مائلة بحيث يكون مقاسه من أسفل ٢٠ مترا طولا × ١٠ أمتار عرضا

(٤٤) المطلوب ايجاد عدد الأمتار المكعبة من الدريس فى عرمة ابعادها كما فى المسألة (٣) من تمرينات (١٥) اذا كان ارتفاع العرمة ١٨ مترا وارتفاع البروز عن الأرض ١٠ أمتار

(٤٥) المطلوب معرفة حجم كمية من الحجر مرصوصة على شكل منشورى ناقص موضوع بعضه على جسر مجاور لطريق وارتفاع الرصة ٢ متر وقاعدته السفلى والعليا كلاهما مستطيل طوله ١٠ × ٤ أمتار و ٨ × ٨ أمتار على التناظر

(٤٦) المطلوب ايجاد حجم خابور أطوال أضلاعه المتوازية هى على التناظر ١٢ ، ١١ ، ١٠ سنتيمترات وقطاعه العرضى العمودى على هذه الأضلاع مثلث متساوى الأضلاع محيطه ٤٥ سنتيمترا

(٤٧) قاعدة خابور شكلها مستطيل طوله ٥ سنتيمترات وعرضه ٢ سنتيمتر والحرف الثالث طوله ٣ سنتيمترات فما هو ارتفاع الخابور اذا كان حجمه ٥٢ سنتيمترا مكعبا

(٤٨) اذا قسم الخابور المذكور فى السؤال السابق الى قسمين وكان المستوى القاطع موازيا للقاعدة وفى وسط المسافة بينها وبين الحرف الثالث فالمطلوب ايجاد حجم كل من الجزأين



(٤٩) هرم قاعدته مستطيلة ١٠ أمتار × ٢٠ مترا قطع منه خابور ارتفاعه نصف ارتفاع الهرم بمستو مار بأحد الضلعين الطويلين للقاعدة والمطلوب تعيين النسبة بين حجم الخابور وحجم الهرم

(٥٠) خزان عمقه ٢٠ مترا وأجنابه مستوية مائلة بحيث تكون قاعدته العليا مربعا مساحته ١٦٠٠ متر مربع وقاعدته السفلى مستطيلا ١٠ أمتار × ٢٠ مترا فما حجم الخزان

(٥١) اذا ملئ الخزان الى نصفه فما عدد الأمتار المكعبة من الماء فيه

(٥٢) المطلوب معرفة مساحة القطاع العرضى للخزان السابق على ارتفاع قدره هـ مترا من القاع بفرض أن يكون بالصورة ا + ب هـ + حـ هـ٢ وبفرض مقاديرهـ على التوالى = ٠ ، ١٠ ، ٢٠

(٥٣) المطلوب ايجاد القطاع العرضى المتوسط للماء اذا ملئ الخزان الى عمق قدره هـ مترا ومقدار الجسم المشتمل عليه متى كان عمق الماء فيه (١) ٦ أمتار (٢) ١٤ مترا

(٥٤) المطلوب حساب الجسم المنشورى لأخدود السكة الحديد السابق فى المسألة (٤) من تمرينات (١٥)

(٥٥) اذا كانت قاعدتا هرم ناقص مثلثين قاعدة كل مثلث منها أكبر من ارتفاعه بقدر ٢ س وكان ارتفاع المثلثين هما هـ١ ، هـ٢ فالمطلوب ايجاد القطاع العرضى للهرم الناقص

(٥٦) اذا كان البعد بين قاعدتى الهرم الناقص فى السؤال السابق ١٠٠ متر وارتفاع تلك القواعد هو ١٥ مترا و ٥ أمتار على التوالى فالمطلوب حساب الجسم (١) عند ما يكون س = ١ ، (٢) عند ما يكون س = ١ $\frac{١}{٢}$

(٥٧) جزء من أخدود فى طريق سكة حديدية طوله ل وجوانبه رأسية وقطاعاه المتطرفان مستطيلان عرضهما ٢ ا وارتفاعهما هـ١ ، هـ٢ على التناظر والمطلوب ايجاد القطاع العرضى المتوسط لهذه الأخدود وحجمه

(٥٨) جزء على شكل منشور ناقص من أخدود سكة حديد قاعدته مستطيلة أفقية طوله ل وعرضه ٢ ا وميل جوانبه ٤٥° على الأفق وارتفاع شبهى المنحرف المكونين للقاعدتين هـ١ ، هـ٢ والمطلوب حساب القطاع العرضى المتوسط للطريق وحجمه

(٥٩) المطلوب معرفة مقدار القطاع المتوسط والحجم اذا كانت زاوية ميل الجوانب للأخدود المذكور على الأفق = ظتا$^{-1}$ س (ملحوظة — اقسم الأخدود الى جزء متوسط محدود بوجهين رأسيين وهرمين ناقصين) .

١١٥ — ملحوظة خاصة بالقطعة الكروية الناقصة

التجويف الكروى

ان القطاع الواقع فى وسط ارتفاع قطعة كروية ناقصة هو

$\frac{1}{2}$ (ط ا^2 + ط ب^2) + $\frac{1}{4}$ ط هـ^2 والقطاع المتوسط هو

$\frac{1}{2}$ (ط ا^2 + ط ب^2) + $\frac{1}{6}$ ط هـ^2

وينبغى أن يلاحظ أن الجزء $\frac{1}{2}$ (ط ا^2 + ط ب^2) واحد فى كل من القانونين وأنه مساو للتوسط الحسابى للقطاعين المتطرفين وذلك موافق لما سبق اثباته فى أوائل هذا الفصل وهو أنه اذا كان القطاع الواقع فى وسط الارتفاع هو المتوسط الحسابى للقطاعين المتطرفين فانه يكون هو القطاع المتوسط أى أنه حتى فى حالة ما يكون المتوسط الحسابى للقطاعين المتطرفين معينا لجزء فقط من القانون المطلوب فان النظرية تكون صحيحة بالنسبة لهذا الجزء

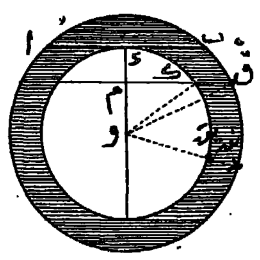
أما من جهة الأجزاء الأخرى من القانونين أى $\frac{1}{4}$ ط هـ^2 ، $\frac{1}{6}$ ط هـ^2 فانهما على التناظر مساويان للقطاع الواقع فى وسط الارتفاع والقطاع المتوسط لكرة قطرها يساوى هـ كما هو واضح بالضرورة وذلك لأنه اذا انعدم كل من ا ، ب فيكون هـ هو مقدار قطر الكرة المعلومة وهذا الأمر يستحق أن يلتفت اليه لأنه يعين جدا على تذكر القانون أنظر المسألة (٤) من تمرينات (١٤) والمسألتين (١١) ، (١٢) من تمرينات (١٦)

وينتج مما تقدم أن التجويف الكروى اذا قطع فى القطعة الكروية الناقصة بقطر مساو الى ارتفاع القطعة الناقصة فان القطاع الواقع فى وسط الارتفاع والقطاع المتوسط للتجويف الكروى الناقص المكوّن بهذه الكيفية يكونان متساويين ويكون كل منهما مساويا للتوسط الحسابى للقطاعين المتطرفين

وحجم التجويف الكروى الناقص يساوى $\frac{١}{٢}$ ط هـ ($أ^٢ + ب^٢$)

١١٦ — الكرة المجوّفة

ان الحالة الخصوصية التى فيها يكون مركز التجويف الكروى متحدًا مع مركز الكرة مهمة جدا بحيث يجب ملاحظتها وذلك لأن جميع القطاعات التى تقطع التجويف متساوية فى المساحة لأن مساحة القطاع الناشئ عن المستوى المارّ بالنقط م ك ن عموديا على و م هو ط م $ن^٢$ — ط م $ك^٢$



وذلك لأن القطاع هو حلقة دائرية مجوّفة أنصاف أقطارها الخارجة والداخلة على التناظر هى م ن ، م ك

فاذا كان نصف قطر الكرة الخارجة هو نق ونصف قطر الكرة الداخلة هو نقَ فانه يكون

$$م ن^٢ = نق^٢ — و م^٢$$

، $$م ك^٢ = نقَ^٢ — و م^٢$$

واذن يكون $$م ن^٢ — م ك^٢ = نق^٢ — نقَ^٢$$

وعليه تكون مساحة القطاع المار بالمستوى م ى و = ط (نو٢ — نو٢)
فاذا فرضنا الحالة الخصوصية التى يكون فيها القطاع ا ى ب مماسا للتجويف بالضبط فمساحة القطاع = ط (ى ب)٢ = ط (نو٢ — نو٢) واذن يكون حجم أى قطعة كروية ناقصة مجوّفة مساويا لحجم اسطوانة متحدة فى الارتفاع مع القطعة الكروية الناقصة ومساحة قاعدتها تساوى مساحة القطاع ا ى ب

أو يمكن اعتبارها مساوية لحجم اسطوانة مجوّفة ارتفاعها مساو لارتفاع القطعة الكروية الناقصة وأنصاف أقطارها الخارجة والداخلة هى نفس أنصاف أقطار الكرة

١١٧ — وينبغى أن يلاحظ أنه اذا كانت القطعة الكروية الناقصة المجوّفة مقسومة بمستويات على أبعاد متساوية متوازية الى قطع كروية ناقصة متساوية الارتفاع فأحجام جميع هذه القطع الكروية الناقصة تكون متساوية ومساوية لحجم قطع من الاسطوانة المكافئة المجوّفة أو المصمتة المقطوعة بمستويات متباعدة عن بعضها بأبعاد متساوية ومساوية للأبعاد المتقدمة

ويلزم أن يلاحظ أيضا أن سمك القطعة الكروية الناقصة المجوّفة مقاسا بالتعامد على السطحين الداخل والخارج هو نو — نوَ وهو بنفسه مساو لسمك الاسطوانة المجوّفة المكافئة المذكورة

١١٨ — القطاع الكروى

ان حجم القطاع الكروى يتحصل بضم حجم المخروط الى حجم القطعة الكروية وهما الحجمان اللذان يتكوّن منهما القطاع الكروى

فحجم القطعة الكروية = ط هـ (١/٢ ا٢ + ١/٦ هـ٢) وحرف هـ رمز لارتفاع القطعة وحرف ا نصف قطر القاعدة

وحجم المخروط هو $\frac{١}{٣}\,\text{ط}\,\text{أ}^{٢}\,(\text{نق} - \text{هـ})$ وفيه نق رمز لنصف قطر الكرة المرتبط مع مقداري أ ، هـ بالمعادلة

$$\text{أ}^{٢} + \text{هـ}^{٢} = ٢\,\text{نق}\,\text{هـ} \quad \dots\dots\dots \quad (١)$$

$$\text{وإذن فحجم القطاع} = \frac{١}{٣}\,\text{ط}\,\text{أ}^{٢}\,\text{نق} + \frac{١}{٦}\,\text{ط}\,\text{هـ}\,(\text{أ}^{٢} + \text{هـ}^{٢})$$

$$= \frac{١}{٣}\,\text{ط}\,\text{أ}^{٢}\,\text{نق} + \frac{١}{٣}\,\text{ط}\,\text{هـ}^{٢}\,\text{نق}$$

$$= \frac{٢}{٣}\,\text{ط}\,\text{نق}^{٢}\,\text{هـ} \quad \dots\dots\dots \quad (٢)$$

وهذا قانون بسيط جدًّا ومهم ويمكن أن يمتحن بأن يفرض فيه على التوالي هـ = ٠ ، هـ = نق ، هـ = ٢ نق

فاذا علم أ وهو نصف قطر القاعدة بدلا من هـ فان مقدار هـ يتحصل بحل المعادلة (١) وأخذ الجذر الأصغر للعادلة أي $\text{هـ} = \text{نق} - \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{أ}^{٢}}$ وهذا المقدار للارتفاع هـ واضح أيضا من علم الهندسة

تمرينات (١٧)

(١) المطلوب البرهنة على أن القطاع المتوسط لكرة يساوي مساحة القطاع الذي بعده عن المركز $\frac{\text{نق}}{\sqrt{٣}}$

(٢) المطلوب البرهنة على أن القطاع المتوسط لقطعة كروية ناقصة ارتفاعها هـ مشتملة على تجويف كروي قطره هـ يساوي المتوسط الحسابي لأي قطاعين عرضيين موازيين للقاعدتين ومتباعدين ببعدين متساويين عن القطاع الواقع في وسط الارتفاع

(٣) المطلوب البرهنة على أن القطاع المتوسط لأى قطعة كروية ناقصة ارتفاعها هـ يساوى المتوسط الحسابى للقطاعين اللذين بعد كل منهما عن القطاع الواقع فى الوسط يساوى $\frac{هـ}{٢\sqrt{٣}}$

(٤) المطلوب البرهنة على أنه اذا كانت القطعة الكروية الناقصة ذات قاعدتين متساويتين وكان ں هو مقدار قطر القطاع الذى بعده عن القطاع المار بوسط الارتفاع يساوى $\frac{هـ}{٢\sqrt{٣}}$ فحجم القطعة الكروية الناقصة يساوى $\frac{١}{٤}$ ط $ں^{٢}$ هـ

(٥) المطلوب اثبات أنه اذا كان ثقب اسطوانى مارا بمركز كرة فالباقى من الكرة يساوى كرة مصمطة قطرها يساوى طول الثقب

(٦) ثقب اسطوانى قطره سنتيمتر واحد مر بمركز كرة قطرها ٦ سنتيمترات وثقلها ٣٠ كيلو جراما والمطلوب ايجاد حجم الجزء المحذوف بسبب الثقب وثقله وحجم الجزء الباقى وثقله

(٧) المطلوب ايجاد أحجام أربعة أجزاء قد انفصلت اليها كرة نصف قطرها نق بثلاثة سطوح اسطوانية محورها متحد مع قطر معلوم من أقطار الكرة ونصف قطر قطاعاتها العرضية تساوى على التناظر $\frac{١}{٤}$ نق ، $\frac{١}{٢}$ نق ، $\frac{٣}{٤}$ نق

(٨) المطلوب ايجاد أحجام الثلاث قطاعات الآتية من كرة نصف قطرها متر واحد بحيث يكون فى القطاع الأول ا = ٠٫٢٥

وفى القطاع الثانى ٢ ا = ٠٫٢٥

وفى القطاع الثالث هـ = ٠٫٢٥

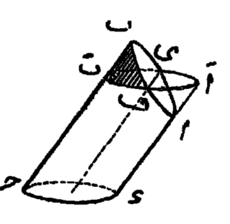
(٩) المطلوب ايجاد الأحجام المنفصلة للأجزاء المخروطية والقطع الكروية لكل من القطاعات السابق ذكرها

١١٩ — الاسطوانة المائلة

فى جميع الأجسام التى اشتغلنا بها فيما تقدم الى الآن قد كان الارتفاع محدودا وكان الجسم محصورا بين مستويين متوازيين والمسألة كانت تنحصر فى إيجاد القطاع العرضى المتوسط أى القطاع العرضى لاسطوانة ارتفاعها كارتفاع الجسم المفروض وحجمها كحجمه

وهناك طائفة أخرى من الأجسام الصلبة وهى التى فيها يكون القطاع العرضى ثابتا والارتفاع متغيرا وأبسط هذه الأحوال هى حالة اسطوانة طرفاها مستويان غير متوازيين وذلك كالاسطوانة ا ب حـ ء فى الشكل الأول من الأشكال الآتية

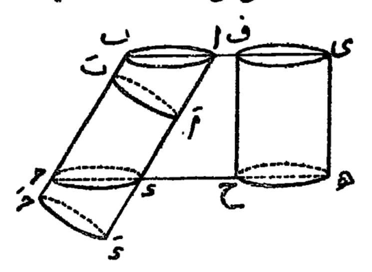
فلنفرض مستويا اَ بَ مرسوما بالتوازى للقاعدة حـ ء مارا من نقطة تقابل النهاية الأخرى ا ب بمحور الاسطوانة



ولنفرض الآن أن الشقة من الاسطوانة المحصورة بين المستويين ا ب ، اَ بَ قد أديرت حول الخط ى ف الذى هو خط تقاطع المستويين فيقع بالضرورة فى الموضع ا ى ف اَ بحيث يكون حجم الاسطوانة المفروضة يساوى حجم اسطوانة قطاعها العرضى هو نفس القطاع العرضى للاسطوانة المفروضة وكذلك طول محورها وقاعدتاها متوازيتان

فحجم الاسطوانة المائلة ذات القاعدتين المتوازيتين يمكن أن يعين بطريقة من اثنتين إما بضرب مساحة احدى القاعدتين فى المسافة العمودية بين القاعدتين وإما بضرب طول المحور فى مساحة القطاع العرضى العمودى عليه

واذن ففى الشكل الثانى يكون حجم الاسطوانة ا ب حـ ى مساويا لحجم الاسطوانة اَ بَ حـَ ىَ التى هى اسطوانة قائمة مساوية لها فى طول المحور



وفى القطاع العرضى وتلك الاسطوانة القائمة تحصل بحذف الجزء ا ب بَ اَ وتعويضه بالجزء ى حـ حـَ ىَ وهو أيضا يساوى حجم الاسطوانة ى ف ح هـ التى قاعدتها ح هـ = حـ ى وارتفاعها يساوى ارتفاع الاسطوانة المفروضة وهناك أمثلة كثيرة على ما تقدم منها أنه اذا وضعت جملة من النقود على طاولة فحجمها وارتفاعها لا يتغيران سواء كانت رأسية أو مائلة فاذا كانت قاعدة الاسطوانة المائلة دائرة فان القطاعات العرضية العمودية على محورها لا تكون دائرة بل تكون قطعا ناقصا والنظريات المتعلقة بالحجم تكون صحيحة على الدوام مهما كانت أشكال القطاعات

١٢٠ — الجسم الحلقى

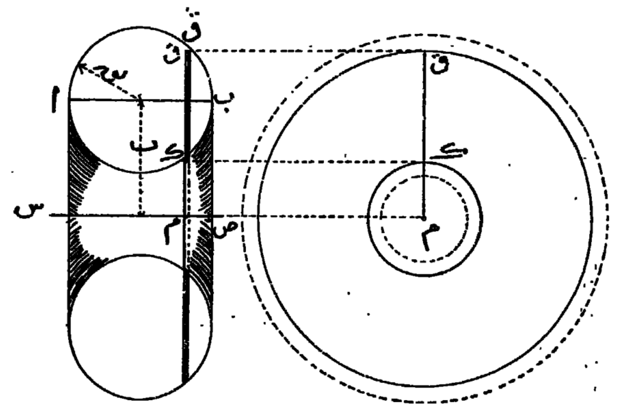
وهناك جسم آخر من هذا النوع وهو ما يسمى بالجسم الحلقى

وهو جسم يتكون من دوران دائرة حول محور خارج عنها الا أنه موجود فى مستويها وهذا المحور يسمى محور الحلقة وحجم الجسم الذى من هذا القبيل هو حاصل ضرب مساحة الدائرة فى المسار الذى يقطعه مركزها

برهـانه

لنفرض أن الدائرة ا ى ب ك تدور حول المحور س ص

ولنفرض أن نصف قطر الدائرة يساوى ى وليكن بعد مركزها عن المحور س ص = ب فهذه المسافة تسمى نصف القطر المتوسط للحلقة



فاذا قطع الجسم بمستو عمودى على س ص بحيث يقطع المحور س ص فى م فسطح القطاع الحادث من هذا المستوى هو سطح حلقى مساحته

= ط (م ى^٢ — م ك^٢)

= ط (م ى + م ك) (م ى — م ك)

= ٢ ط ب × ى ك

لأن م ى + م ك = ٢ ب ، م ى — م ك = ى ك

وحينئذ فاذا رسم مستو آخر مواز للستوى الأول بحيث يمر من النقطتين نَ ، ك فحجم الجسم المحصور بينهما يساوى ٢ ط ب × المساحة ن ك كَ نَ وحجم جميع الجسم يكون بناء على ذلك مساويا الى ٢ ط ب × مساحة الدائرة

= ٢ ط ب . ط نق^{٢}

= ٢ ط^{٢} نق^{٢} ب

ومن هنا يستنتج أن حجم الحلقة يساوى مساحة الدائرة (ط نق^{٢}) مضروبا فى طول المسار المقطوع بمركز الدائرة (٢ ط ب) وذلك الحجم يساوى حجم اسطوانة قطاعها العرضى يساوى القطاع العرضى للجسم (ط نق^{٢}) وارتفاعها يساوى ٢ ط ب

ونسبة جزء الحلقة المقطوع بمستويين مارين بالخط س ص ومائلين على بعضهما بزاوية قدرها هـ الى حجم الحلقة التامة هى كنسبة الزاوية هـ الى ٢ ط وبناء على ذلك تكون مساوية الى هـ ب × نق^{٢} = ط هـ نق^{٢} ب

تمرينات (١٨)

(١) المطلوب إيجاد حجم حلقة قطرها الخارج ٦ سنتيمترات وقطرها الداخل ٤ سنتيمترات

(٢) حلقة مجوّفة يمكنها أن تسع بالضبط ٦ كرات متماسة نصف قطر كل منها سنتيمتر واحد فما هو حجم الفراغ الواقع داخل الحلقة ومقدار الحجم المشغول بالكرات

(٣) حلقة مجوّفة يمكن أن تسع كرات عددها د ذات نصف قطر معين مقداره ا فما هو نصف القطر المتوسط للحلقة

(٤) المطلوب اختبار حالة حلقة فيها ب = نق وتعيين حجم جسم كهذا

١٢١ — ان النظرية العامة التى يدخل فيها شرح حجم الحلقة هى

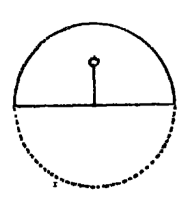
اذا دار أىّ شكل مستو حول محور خارج عنه وموجود فى مستويه فحجم الجسم الناشئ عن الدوران يساوى مساحة الشكل مضروبة فى المسار الذى تقطعه نقطة معينة من الشكل تسمى مركز المساحة

فمثلا فى الجسم الحلقى يكون مركز الدائرة المتحركة هو مركز المساحة وفى هذه الحالة تكون مناسبة التسمية الاصطلاحية «مركز المساحة» واضحة وتأسيس النظرية العمومية يحتاج الى استعمال حساب التكامل ولكننا اذا فرضنا معرفتها فانه يمكن الحصول على نتائج مهمة وسنوضح ذلك فيما بعد

١٢٢ — المطلوب إيجاد مركز مساحة نصف دائرة بواسطة النظرية المذكورة آنفا

اذا دار نصف الدائرة حول قاعدته فان الجسم المرسوم هو كرة

فليكن نق نصف قطر نصف الدائرة ، س بعد مركز مساحتها عن القاعدة فيكون



مساحة نصف الدائرة $= \frac{١}{٢}$ ط نق^٢

والمسافة المقطوعة بمركز المساحة $=$ ٢ ط س

وحجم الكرة $= \frac{٤}{٣}$ ط نق^٣

وبناء على ذلك يكون بمقتضى النظرية

$$\frac{١}{٢} \text{ ط نق}^٢ \times ٢ \text{ ط س} = \frac{٤}{٣} \text{ ط نق}^٣$$

واذن يكون س $= \frac{٤ \text{ نق}}{٣ \text{ ط}}$ أو نحو $\frac{٣}{٧}$ نق

١٢٣ — إيجاد أحجام أجزاء من حلقة متكوّنة من دوران النصفين الداخل والخارج من الدائرة المولدة

اذا أخذنا الجزء الخارج نجد أنه مساو لمساحة نصف الدائرة مضروبا في مسار مركز مساحتها = ١/٢ ط نق^٢ × ٢ ط (ب + ٤ نق / ٣ ط) = ط^٢ نق^٢ ب + ٤/٣ ط نق^٣

وبمثل ذلك يكون الجزء الداخل

١/٢ ط نق^٢ × ٢ ط (ب − ٤ نق / ٣ ط) = ط^٢ نق^٢ ب − نق^٣ ٣/٤ ط

ومن هنا يكون جزء الحلقة المرسوم بنصف الدائرة الخارج أكبر من نصف حجم الحلقة بقدر حجم كرة نصف قطرها يساوى نصف قطر الجزء الصلب من الحلقة والجزء المرسوم بنصف الكرة الداخل أقل من نصف الحجم بالمقدار نفسه

١٢٤ المطلوب بيان أن مركز مساحة مثلث مكوّن بمقتضى النظرية السابقة هو نقطة تقابل الخطوط الواصلة من رؤوس المثلث الى منتصفات الأضلاع المقابلة

من المعلوم أنه في المثلث ا ب حـ اذا كان ا ى ، ب ى منصفين من الثلاثة ومتقاطعين في نقطة ع فان نقطة ع تكون موضوعة بحيث يكون ا ى يساوى ثلاثة أمثال ع ى ، ب ى = ٣ ع ى وبمثل ذلك بالنسبة للنصف المار بنقطة حـ

لأننا اذا رسمنا حـ هـ موازيا الى ب ى ومددناه حتى يقابل ا ى في نقطة هـ

فان ء هـ = ء ع بمقتضى ما هو مقرر فى الهندسة 6 ا ع : ع هـ : : ا ى : ى حـ واذن يكون ا ع = ع هـ = ٢ ع ء ومنه ا ء = ٣ ع ء

نظرية — اذا فرض الآن أن المثلث يدور حول ب حـ وأن بعد نقطة ا عن ب حـ تساوى هـ فان الجسم المتولد يتركب من مخروطين قاعدتهما = ط $هـ^٢$ ومجموع ارتفاعهما = ب حـ واذن يكون الجسم = $\frac{١}{٣}$ ط $هـ^٢$ × ب حـ ومساحة المثلث هى $\frac{١}{٢}$ هـ × ب حـ

وعلى ذلك اذا كان س هو بعد مركز المساحة عن ب حـ فانه يكون

$$\frac{١}{٢} \text{هـ} \times \text{ب حـ} \times ٢ \text{ط س} = \frac{١}{٣} \text{ط هـ}^٢ \times \text{ب حـ}$$

ومنه $$\text{س} = \frac{١}{٣} \text{هـ}$$

وعلى ذلك تكون النقطة المطلوبة موجودة على خط مار بنقطة ع مواز الى ب حـ و بمثل ذلك اذا أدير المثلث حول ا حـ فانه يمكننا اثبات أنها يلزم أن تكون على خط مار بنقطة ع مواز الى ا حـ واذن فيجب أن تتحد النقطة مع نقطة ع

تمرينات (١٩)

(١) المطلوب إيجاد حجم حلقة مكوّنة بدوران مثلث متساوى الأضلاع حول محور فى مستويه مع العلم بأن ضلع المثلث ٦ سنتيمترات وبعد مركز مساحته عن محور الدوران ١٠ سنتيمترات

(٢) المطلوب إيجاد حجم جسم مكوّن بدوران مثلث حول قاعدته بفرض أن طول القاعدة ٤ سنتيمترات وارتفاعه ٣ سنتيمترات

(٣) المطلوب إيجاد حجم جسم مكوّن بدوران مثلث حول قاعدته بفرض أن طول القاعدة ب وارتفاع المثلث هـ

(٤) المطلوب إيجاد الجسم الذى يتولد من دوران شبه منحرف حول أحد ضلعيه المتوازيين بفرض أن طول ذلك الضلع ا وطول الضلع الثانى ب والمسافة بينهما تساوى هـ

(٥) ثلاث دوائر متساوية نصف قطر كل منها متر متماسة أديرت حول المماس المشترك بين اثنين منها الذى لا يقطع الثالثة والمطلوب حساب الجسم المكون من هذه المساحة الدائرية

(٦) مربع مركب عليه نصف دائرة قطرها أحد أضلاع المربع ويدور حول ضلعه المقابل للضلع المذكور والمطلوب إيجاد الجسم الناشئ عن ذلك الدوران بفرض أن ضلع المربع ٩ سنتيمترات

١٢٥ — الأجسام المتشابهة

يقال أن الجسمين متشابهان متى كانت جميع الأبعاد الخطية المتناظرة فى كليهما متناسبة فيقال مثلا أن قطعتين كرويتين ناقصتين متشابهتان متى كانت أنصاف أقطار القاعدتين والارتفاع فى احداهما تشتمل على أمتار بقدر ما تشتمل عليه مقاييس الأخرى من الديسيمترات وفى هذه الحالة تكون الأبعاد الخطية فى احدى القطعتين عشرة أمثال الوحدات الخطية فى الأخرى

والقطاعات العرضية المتناظرة فى الجسمين تكون نسبتها الى بعضها معلومة وهى مربع النسبة بين الأبعاد الخطية وهذا صحيح بالنسبة لأسطح الأجسام وبالنسبة لجميع المساحة المتناظرة فى الجسمين وذلك لأن المساحة هى حاصل ضرب بعدين والمساحة المتناظرة فى كل من الجسمين هى حاصل ضرب زوجين متناظرين من الأبعاد . . . .

وحينئذ فاذا كان أحد الأبعاد فى أحدهما يساوى م مرات من البعد المناظر له فى الآخر فان حاصل ضرب ضلعين من أحد الجسمين يكون مساويا للحاصل المناظر له فى الجسم الآخر مضروبا فى م٢ مرات

وفى المثال السابق ذكره تكون المسائح فى القطعة الكروية الناقصة الكبرى مشتملة بالضرورة على وحدات من الأمتار المربعة بقدر ما تشتمل على الأخرى من الديسيمترات المربعة

وأحجام الأجسام تكون بنسبة مكعبات الأبعاد الخطية لأن الحجم ينتج من حاصل ضرب ثلاثة أبعاد واذا كانت الأبعاد الثلاثة فى أحد الجسمين أكبر من نظيرها فى الجسم الثانى بقدر م مرات فحجم الأول يكون أكبر من حجم الثانى بقدر م٣ مرات

وفى المثال السابق من الواضح أن حجم القطعة الكبرى يشتمل على أمتار مكعبة بقدر ما يشتمل عليه الحجم الثانى من الديسيمترات المكعبة

وفى الاشتغال بالمسائل الخاصة بالأشكال المتماثلة من الضرورى أن نتذكر النظريات الأساسية جيدا وهى أنه اذا كانت الأبعاد الخطية على نسبة معلومة قدرها م : ١ فنظائرها فى السطوح تكون بنسبة م٢ : ١ وفى الأحجام بنسبة م٣ : ١

فاذا علمنا فى أى مثال أن المسائح المتناظرة نسبتها الى بعضها كنسبة ك : ١

فاللازم انما هو أن نضع م٢ = ك ثم نبحث عن مقدار م لأجل مقارنة الأطوال ، م٣ لمقارنة الأحجام ثم اذا علمنا أن الأحجام هى بنسبة ك : ١ فيلزم أن نضع م٣ = ك ثم نبحث عن م ، م٢ أو أحدهما بمقتضى ذلك على حسب ما تحتاج اليه المسألة المبحوث عنها

تمرينات (٢٠)

(١) نصفا قطر قاعدتى قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٣ أمتار هما ٥ أمتار و ٨ أمتار على التناظر والأبعاد الطولية فى قطعة أخرى مشابهة لهذه هى ضعف أبعاد القطعة السالفة الذكر والمطلوب إيجاد القطاع العرضى المتوسط لكليهما والحجم كذلك ثم مقارنة ما ذكر

(٢) القاعدة الصغرى لقطعة كروية ناقصة مشابهة لما ذكر فى المسألة السابقة تشتمل على ١٦ مترا مربعا والمطلوب إيجاد ارتفاع القطعة الكروية الناقصة وحجمها

(٣) القطاع العرضى المتوسط لقطعة كروية ناقصة مشابهة لما سبق ذكره يساوى ١٦ مترا مربعا والمطلوب إيجاد الارتفاع والحجم

(٤) حجم قطعة كروية ناقصة مشابهة لما سبق ١٠٠ متر مكعب فما ارتفاعها

(٥) نصفا قطر قاعدتى مخروط ناقص ارتفاعه هـ هما ا ، ب على التناظر وارتفاع ونصفا قطرى قاعدتى مخروط آخر هى على التناظر ٢ هـ ، ٢ ا ، ٢ ب والمطلوب إيجاد ارتفاعى المخروطين الكاملين اللذين أخذ منهما هذان الجزآن وحجمهما والمقارنة بينهما ثم إيجاد حجم المخروطين الناقصين المذكورين والمقارنة بينهما

(٦) أى مخروط ناقص يكون معينا تعيينا تاما اذا علم نصفا قطرى قاعدتيه وارتفاعه فالمطلوب بيان أنه اذا كانت نسبة هذه الأبعاد فى أى مخروط ناقص الى نظيرها فى أى مخروط ناقص آخر هى م فتكون النسبة بين أى بعدين متناظرين فى المخروطين هى م أيضا

(٧) المطلوب بيان أن جميع الكرات هى أشكال متشابهة

(٨) اذا كانت مساحة دائرة عظيمة فى كرة (أى الحادثة بقطع الكرة بمستو يمر بمركزها) هى ضعف دائرة عظيمة فى كرة أخرى فالمطلوب مقارنة نصف قطر الكرتين وحجمهما

(٩) اذا كان ثقل كرة قطرها متر واحد يساوى ١٣٠٠ كيلوجراما فما قطر كرة من المادة نفسها وثقلها ١٦٢,٥ كيلوجراما

(١٠) القطاع العرضى المتوسط لكرة هو متر واحد مربع والمطلوب معرفة نصف قطرها وحجمها

(١١) المطلوب اثبات النظرية التى فى مسألة (٣٠) من تمرينات (١٦) بتكميل المخروط الذى قد أخذ منه المخروط الناقص المذكور فى تلك المسألة ومقارنة أحجام المخاريط المتشابهة فى قواعدها على التناظر ذات أنصاف أقطار مقاديرها ١ ، ب ، حـ

(١٢) المطلوب بيان أنه اذا قسم المخروط الناقص الى قسمين متشابهين فان حـ^{٢} = ١ ب

الفصل السادس

التقدير التقريبى للأجسام

١٢٦ — حينما يراد تعيين حجم جسم أو سعة اناء ليس شكله أحد الأشكال السابقة ولا مركبا منها فانه يمكن الحصول على المقدار التقريبى للحجم الى أى درجة أريدت من الدقة بالاستعانة بقانون سمبسون بشرط أن يكون فى الامكان تحقيق مسائح أى عدد أريد من القطاعات العرضية المتباعدة بأبعاد متساوية عن بعضها

فمثلا اذا أريد تعيين حجم برميل ارتفاعه الداخل هـ وأقطاره الداخلة هى $د_٠$ فى طرفيه ، $د_١$ فى وسطه فان قانون سمبسون يعطى مقدار القطاع المتوسط بالتقريب هكذا $\frac{ط}{٤} \cdot \frac{٢ د_٠^٢ + ٤ د_١^٢}{٦}$ واذن يكون الحجم بالتقريب $\frac{١}{١٢}$ ط هـ $(د_٠^٢ + ٢ د_١^٢)$

فاذا أريد الحصول على تقريب أدق من هذا ينبغى أن يقاس القطاع الواقع فى وسط كل نصف من نصفى البرميل وتطبق القاعدة على كل نصف (وهناك طريقة أخرى لقياس حجم برميل موضحة فى بند ١٣٥)

١٢٧ — والقاعدة العامة لتطبيق القانون لأجل تعيين حجم أى جسم بالضبط هى أن تقاس جملة قطاعات عرضية متوازية عددها كاف وتقاس أيضا القطاعات الواقعة فى منتصف المسافات بين كل زوج من القطاعات وتطبق القاعدة على كل قسم من أقسام الجسم

وعلى ذلك اذا فرضنا أن مساحة القطاعات العرضية السابق ذكرها هى $س_٠$ ، $س_٢$ ، $س_٤$ ... وأن القطاعات الواقعة فى وسط المسافات بين تلك

القطاعات هى $س_{٠}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ... وكان طول المسافة بين $س_{٠}$ ، $س_{٢}$ = ٢ ل فحجم الجزء من الجسم المحصور بين $س_{٠}$ ، $س_{٢}$ هو

$ل_{٣}$ ($س_{٠} + ٤ س_{١} + س_{٢}$) وبمثل ذلك تعين الأجزاء الباقية من الجسم فاذا كانت جميع القطاعات المتوالية متباعدة بالتساوى فان حجم الجسم يكون هو

$$\left.\begin{aligned} & ل_{٣}[(س_{٠}+٤س_{١}+س_{٢})+(س_{٢}+٤س_{٣}+س_{٤})+(س_{٤}+٤س_{٥}+س_{٦})+\cdot] \\ & = ل_{٣}(س_{٠}+٤س_{١}+٢س_{٢}+٤س_{٣}+٢س_{٤}+٤س_{٥}+\cdot\cdot+س_{٢د}) \\ & = \frac{هـ}{٦د}(س_{٠}+٤س_{١}+٢س_{٢}+٤س_{٣}+٢س_{٤}+٤س_{٥}+\cdot\ +س_{٢د}) \end{aligned}\right\} (١)$$

وذلك بفرض أن هـ هو الطول الكلى للجسم المساوى الى ٢ د ل

وعليه يكون القطاع العرضى المتوسط فى حالة القطاعات المتباعد بالتساوى هو

$$ع = \frac{١}{٦د}(س_{٠} + ٤ س_{١} + ٢ س_{٢} + ٤ س_{٣} + \cdots + س_{٢د}) \cdots (٢)$$

القوانين الخاصة بالقطاع الواقع فى الوسط والقطاعين المتطرفين (حينما تكون القطاعات متساوية التباعد)

١٢٨ — وفى بعض الأحيان حينما تكون القطاعات العرضية المتوالية $س_{٠}$ ، $س_{٢}$ ، .. لا تختلف عن بعضها كثيرا فان مقدار $\frac{١}{٢}$ ($س_{٠} + س_{٢}$) لا يختلف كثيرا عن القطاع المتوسط للجزء المحصور بين $س_{٠}$ ، $س_{٢}$ وكذلك يكون $\frac{١}{٢}$ ($س_{٢} + س_{٤}$) متساويا بالتقريب للمتوسط للجزء الواقع بين $س_{٢}$ ، $س_{٤}$ وهكذا بحيث أنه اذا كانت القطاعات على مسافات متساوية فان المتوسط يساوى بالتقريب

$$ع َ = \frac{١}{ﺩ} \left(\frac{س_٠ + س_٢}{٢} + \frac{س_٢ + س_٤}{٢} + \cdot\cdot \right)$$

$$= \frac{١}{ﺩ} \left(\frac{١}{٢} س_٠ + س_٢ + س_٤ + \cdots + \frac{١}{٢} س_{٢ﺩ} \right) \cdots (٣)$$

ومع ذلك فانه يمكن الحصول على تقريب أدق للتوسط من القطاعات المتوسطة $س_١ ، س_٣ ، \cdots$ أى فى حالة تساوى تباعد القطاعات

$$ع ً = \frac{١}{ﺩ} \left(س_١ + س_٣ + \cdots\cdot + س_{٢ﺩ-١} \right) \cdots\cdot (٤)$$

وأبسط طريقة لاثبات أفضلية هذا التقريب هى أن نلاحظ أن

$$٢ ع ً + ع ُ = ٣ ع \cdots\cdots\cdot (٥)$$

ومن هذه المعادلة يمكن أن يرى أنه اذا فرض أن مقدار ع مضبوط فان ضبط مقدار ع ً هو ضعف ضبط مقدار ع َ وأن المقدارين التقريبين ع َ ، ع ً أحدهما أكبر من ع والآخر أصغر منه .

لأننا اذا فرضنا أن ـَ هو مقدار الخطأ فى ع َ وأن ـً مقدار الخطأ فى ع ً بحيث يكون ع َ = ع + ـَ ، ع ً = ع + ـً وعوّضنا فى معادلة (٥) مقادير ع َ ، ع ً فاننا نجد

$$٢ ـً + ـَ = ٠$$

ومن هنا يعلم أن ـَ ضعف ـً وأنها تخالفها فى العلامة

وهناك مقدار أضبط من ع َ ، ع ً (الا أنه ليس مضبوطا كضبط ع) وهو

$$ع = \frac{١}{٢ﺩ} \left(\frac{١}{٢} س_٠ + س_١ + س_٢ + \cdots + \frac{١}{٢} س_{٢ﺩ} \right) \cdot\cdot (٦)$$

وهو مقدار مشابه لمقدار ع َ وانما أخذت فيه جميع القطاعات التى قيست

ويجب على الطالب أن يقيم البرهان على الارتباطين

٢ عˆ + ع″ = ٣ ع . . . . (٧)

، ٤ ع‴ − ع′ = ٣ ع . . . . (٨)

التى منها يثبت أن ضبط ع‴ هو ضعف ضبط ع″ وأربعة أمثال ضبط ع وذلك بفرض أن ع معتبر مضبوطا ضبطا تاما

والارتبـاط عˆ = ½ (ع′ + ع″) . . . . (٩)

يستحق أيضا أن يلتفت اليه

مثـال — لنفرض أن س. = ١٠٠٠

س١ = ٩٨٥

س٢ = ٩٤٠

س٣ = ٨٦٦

س٤ = ٧٦٦

س٥ = ٦٤٣

س٦ = ٥٠٠

فيكون

ع′ = ⅓ (٥٠٠ + ٩٤٠ + ٧٦٦ + ٢٥٠) = ٢٤٥٦/٣ = ٨١٨ ⅔

ع″ = ⅓ (٩٨٥ + ٨٦٦ + ٦٤٤) = ٢٤٩٤/٣ = ٨٣١ ⅓

عˆ = ½ (ع′ + ع″) = ١٦٥٠/٤ = ٨٢٥

ومقدار ع يمكن إيجاده بطرق متعدّدة ممـا تقدّم (أو يحسب على انفراده كما سنعمل فى المثـال الآتى)

واذن يكون

٢ ع″ + ع′ = ٢٤٨١ ⅓

٢ ع‴ + ع″ = ٢٤٨١ ⅓

٤ عˆ − ع′ = ٢٤٨١ ⅓

وعليه فبأى طريقة من تلك الطرق يكون

$$ع = \frac{١}{٩} ٨٢٧$$

وإذن يكون الخطأ فى عَ هو $\frac{٤}{٩}$ ٨ بالنقص (أى نحو واحد فى المسائة)

، عً « $\frac{٢}{٩}$ ٤ بالزيادة (« $\frac{١}{٢}$ «)

، عٌ « $\frac{١}{٩}$ ٢ بالنقص (« $\frac{١}{٤}$ «)

وهاك مثال آخر — ليكن

$س_٠ = ٣٠١$ ، $س_١ = ٣٢١$ ، $س_٢ = ٣٣٣$ ، $س_٣ = ٣١٣$ ، $س_٤ = ٢٧٩$

ففى هذه الحالة يكون

$$عَ = \frac{١}{٢} \left(\frac{٢٨٩ + ٣٠١}{٢} + ٣٣٣ \right) = ٣١٤$$

$$، عً = \frac{١}{٢} (٣٢١ + ٣١٣) = ٣١٧$$

$$، عٌ = \frac{١}{٢} (عَ + عً) = \frac{١}{٢} ٣١٥$$

$$، ع = \frac{١}{٣} (عَ + ٢ عً) = ٣١٦$$

١١٩ — واذا نظرنا الى القانونين التقريبيين عَ ، عً اللذين فيهما يفرض أن الجسم مقسم الى أقسام عددها ﺩ بقطاعات على مسافات متساوية وهى $س_٠$ ، $س_٢$ . . . وأن القطاعات $س_١$ ، $س_٣$ . . . تكون هى القطاعات الواقعة فى وسط هـذه الأجزاء فيجب أن يلاحظ أن القانون عَ يشتمل على القطاعات $س_٠$ ، $س_٢$ ، . . . وأن القطاعين المتطرفين $س_٠$ ، $س_{٢ﺩ}$ ليس لهما سوى نصف أهمية القطاعات الأخرى فى تقـدير المتوسط ولكن فى القانون عً الذى هو عبارة عن تقدير المتوسط من القطاعات الواقعة فى وسط كل جزء من الجسم تكون جميع هـذه القطاعات متساوية فى الأهمية وينبغى أن يلاحظ أن القطاعات المتوالية الواقعة فى وسط الأجزاء هى متباعدة

بالتساوى عن بعضها الا أن تباعد القطاع الأول والأخير أى $س_١$ ، $س_{٢د-١}$ عن طرفى الجسم هما فقط نصف التباعد بين القطاعات المتتالية الواقعة فى وسط الأجزاء ومن المهم أن نلاحظ أن المتوسط المتحصل من القطاعات الواقعة فى وسط الأجزاء مضبوطة ضعف ضبط مايتحصل من اعتبار القطاعات المتطرفة

١٣٠ — وفى بعض الأحيان قد يعين المتوسط بأخذ جميع القطاعات $س_٠$ ، $س_٢$ ، ... كأنها متساوية الأهمية ويؤخذ مقدار المتوسط مساويا الى $\frac{١}{د+١}(س_٠ + س_٢ + .. + س_{٢د})$ الا أن هذا المقدار أبعد عن الحقيقة كثيرا عن بعد المقدار $\frac{١}{د}(\frac{١}{٢}س_٠ + س_٢ + ... + \frac{١}{٢}س_{٢د})$ عنها واذن فلا يجوز استعماله أبدا ومما يستحق الاعتبار ملاحظة قيمة هذا التقدير فى المثالين المنتخبين ففى الأول نجد

$$\frac{١}{٤}(١٠٠٠ + ٩٤٠ + ٧٦٦ + ٥٠٠) = \frac{٣٢٠٦}{٤} = ٨٠١\frac{١}{٢}$$

وهى نتيجة أردأ بكثير من نتيجة التقديرات التقريبية السابقة

وفى الثانى تعطى هذه الطريقة المقدار الآتى

$$\frac{١}{٣}(٣٠١ + ٣٣٣ + ٢٨٩) = \frac{٩٢٣}{٣} = ٣٠٧\frac{٢}{٣}$$

وهى نتيجة لاتقارن بالنتائج التى تعطيها الطرق المضبوطة وانما ذكرنا هذه الطريقة لاظهار ضرورة اجتنابها فانها ليست مؤسسة على نظرية ولا بسيطة بساطة تحبب فى استعمالها لأنها ليست أسهل من عَ ولا من عً

١٣١ — وليس لدينا ملحوظات خاصة بالقانون عً فهو من نوع عَ الا أنه مؤسس على قياس قطاعات عددها ضعف مايلزم فى عَ ومع ذلك فهو جدير بالاعتبار لأنه بسبب أن عدد القطاعات فيه ضعف عدد قطاعات القانون الآخر يكون ضبطه أربعة أمثال ضبط القانون المذكور

١٣٢ — ولا جرم أنه ليس فى الطرق السابقة التقريبية مايصح مطلقا أن يقارن من حيث الدقة بقانون ع المتحصل من قانون سامبسون (الا اذا كان الجسم قطعا مكافئا تحركيا فتكون جميع القوانين فى هذه الحالة مضبوطة) الا أن قوانين هذا المبحث تستعمل غالبا فى الأعمال بسبب أنها سريعة ولأن الضبط الذى يتحصل منها يكون كافيا فى حالة ما يكون الفرق بين القطاعات المتوالية غير كبير وفضلا عن ذلك فان الحساب بالقانون ع يحتاج الى قياس عدد فردى من القطاعات هى $س_{٠}$ ، $س_{١}$ ، ... ، $س_{٢ن}$ ولكن القانون ع′ لايحتاج لذلك لأن عدد القطاعات $س_{٠}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٢ن}$ يمكن أن يكون أى عدد فردى أو زوجى فاذا كان عدد القطاعات المتباعدة عن بعضها بالتساوى زوجيا فيمكن استعمال القانون ع′ ولكن القانون ع لايمكن استعماله الا أنه يجب أن نتذكر أن القوانين ع′ ، ع″ ، ع‴ هى قوانين تقريبية موافقة ليس الا أما القانون ع فهو أفضل مايمكن الحصول عليه للتقدير فى حالة معرفة مقاس القطاعات ومع ذلك فهناك قوانين أخرى من طبيعة القانون ع تستعمل فى بعض الأحوال اذا كان عدد القطاعات العرضية المقيسة أكثر من ثلاثة قطاعات متساوية التباعد الا أن القانون ع أكثر استعمالا وهو أحسن القوانين المعروفة وسنعطى فى آخر هذا الفصل القوانين المختلفة الممكن استعمالها وجميعها موضوعة للحصول على أحسن نتيجة بالنسبة للقطاعات التى قيست فعلا وفى جميع القوانين التى من هذا النوع يفرض أن القطاعات على أبعاد متساوية

القوانين الخاصة بالقطاع الواقع فى الوسط والقطاعين المتطرفين

(حينما تكون القطاعات غير متساوية التباعد)

١٣٣ — قد يكون من الموافق فى بعض الأحوال أن تؤخذ قطاعات ليست على أبعاد متساوية ففى معظم الأحوال يقسم الجسم الى أقسام طولها مناسب

ا، ، ب، ، حـ، وتقاس القطاعات التى فى وسط تلك الأقسام وهى $س_١$ ، $س_٢$ ، .. وفى هذه الحالة يكون حجم الجسم بالتقريب مساويا الى

$$ا_١ س_١ + ب_١ س_٢ + حـ_١ س_٣ + ...$$

أو تقسم الى أطوال مقاديرها ا ، ب ، حـ ، ... وتقاس القطاعات المتطرفة لهذه الأطوال فلنفرض أن تلك القطاعات العرضية هى $س_•$ ، $س_١$ فيكون الحجم مساويا تقريبا الى

$$ا \frac{س_• + س_١}{٢} + ب \frac{س_١ + س_٢}{٢} + حـ \frac{س_٢ + س_٣}{٢} + ...$$

$$= \frac{١}{٢} [ا س_• + (ا + ب) س_١ + (ب + حـ) س_٢ + ... +$$
(الطول الأخير) $س_ن$]

وفى هذا القانون يكون المعامل الذى يضرب فيه كل قطاع وسطى هو البعد بين القطاع الذى قبله والقطاع الذى بعده والمعاملان اللذان يضرب فيهما القطاعان المتطرفان هما البعدان المتطرفان المتعلقان بهما

ويمكن أن تميز الطريقتان احداهما من الأخرى باسم طريقة القطاعات الواقعة فى الوسط وطريقة القطاعات المتطرفة على التناظر ويمكن استعمال كلتا الطريقتين اذا كانت القطاعات المتطرفة للأبعاد ا ، ب ، ... هى بنفسها قطاعات فى الوسط بالنسبة للأبعاد $ا_١$ ، $ب_١$ ، ... (كما هى الحالة المبينة بالشكل) بشرط أن يقاس بالضرورة القطاعان المتطرفان أيضا فاذا أريد فحص دقة هذه النتيجة فالحساب المضاعف بهذه الصورة يكون خير

دليل لذلك فاذا أعطى كل من الطريقتين نتيجة واحدة بتقريب مسموح به فالنتيجة يمكن التعويل على ضبطها ولكن اذا كان بينهما اختلاف قليل فالحجم المضبوط يكون محصورا بين الحجمين المحسوبين ويمكن اعتباره المتوسط الحسابى بينهما اذا لم يوجد سبب خاص يحمل على اعتقاد أن إحداهما أدق من الأخرى

١٣٤ — والارتباط بين الأطوال $ا_{1}$ ، $ب_{1}$ ، $حـ_{1}$ . . . والأطوال ا ، ب ، حـ . . . فى حالة ما تكون القطاعات المقيسة هى القطاعات الواقعة فى وسط مجموعة الأطوال الأولى وفى الوقت نفسه هى القطاعات المتطرفة للمجموعة الثانية — هو ارتباط لا يخلو من الفائدة وذلك لأن

$ا = \frac{1}{2} ا_{1}$ ، $ب = \frac{1}{2}(ا_{1} + ب_{1})$ ، $حـ = \frac{1}{2}(ب_{1} + حـ_{1})$

ومن هنا يكون $\frac{1}{2} ا_{1} = ا$ . . . .

، $\frac{1}{2} ب_{1} = ب - \frac{1}{2} ا_{1} = ب - ا$

، $\frac{1}{2} حـ_{1} = حـ - \frac{1}{2} ب_{1} = حـ - ب + ا$

، $\frac{1}{2} ء_{1} = ء - \frac{1}{2} حـ_{1} = ء - حـ + ب - ا$ ، الخ

ومن هذه المعادلات يمكن ايجاد $ا_{1}$ ، $ب_{1}$ ، $حـ_{1}$ . . متى علمت مقادير ا ، ب ، حـ ، ء . . . . ومن الواضح أن عدد الأطوال فى المجموعة $ا_{1}$ ، $ب_{1}$ ، $حـ_{1}$ . . . ينقص عن عدد الأطوال فى المجموعة ا ، ب ، حـ ، ء . . . بواحد (أنظر الشكل ببند ١٣٣) فمثلا اذا كان ء هو الطول الأخير فى المجموعة الثانية فالحد الأخير فى المجموعة الأولى هو $حـ_{1}$ وفضلا عن ذلك فان ء تكون مساوية الى $\frac{1}{2} حـ_{1}$ وبناء عليه يكون $ا - ب + حـ - ء = ٠$.
وبمثل ذلك اذا كان كل من ے ، $ء_{1}$ هما الطولين النهائيين فى المجموعتين فيلزم أن يكون $ے = \frac{1}{2} ء_{1}$ وبناء على ذلك يكون $ا - ب + حـ - ء + ے = ٠$.

واذن فلو كانت الأطوال ا ، ب ، حـ ، . . . . مكيفة بحيث تكون القطاعات النهائية لها هي القطاعات الواقعة في وسط أي مجموعة من المسافات $ا_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ فيلزم أن يكون

$$ا - ب + حـ - ء + \ldots\ldots = ٠$$

وهذا هو الشرط الوحيد اذا لم يكن لدينا اعتراض على كون بعض الأبعاد $ا_٢$ ، $ب_٢$ ، $حـ_٢$ ، . . . سالبا فاذا أريد تجنب ذلك فيجب أن تكون جميع الكميات المتوسطة ب − ا ، حـ − ب + ا ، ء − حـ + ب − ا ، . . . موجبة

فاذا كان ن هو عدد الأطوال في المجموعة $ا_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ . . . فالشرط اللازم السابق يمكن بيانه جبريا بأن يقال ان الدالة ا $س^{ن}$ + ب $س^{ن-١}$ + حـ $س^{ن-٢}$ + . . . يجب أن تكون قابلة للقسمة على س + ١ بدون باق

. فاذا قسمت بهذه الكيفية فليس من الصعب أن نرى أن خارج القسمة هو

$$\frac{١}{٢}\left(ا_١ س^{ن-١} + ب_١ س^{ن-٢} + حـ_١ س^{ن-٣} + \ldots\ldots\right)$$

لأننا اذا ضربنا هذا المقدار في س + ١ كان الحاصل :

$$\left(\frac{١}{٢}ا_١\right)س^{ن} + \frac{١}{٢}(ا_١ + ب_١)س^{ن-١} + \frac{١}{٢}(ب_١ + حـ_١)س^{ن-٢} + \ldots$$

وهذا المقدار هو بذاته المقدار

$$ا س^{ن} + ب_٤ س^{ن-١} + حـ_٤ س^{ن-٢} + \ldots\ldots$$

فاذا كانت مقادير ا ، ب ، حـ . . . . معلومة بحيث تكون ا − ب + حـ − . . . = ٠ فربما كانت أحسن طريقة لاستخراج مقادير $ا_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ . . . متى كانت القطاعات متعددة هي طريقة القسمة السابق ذكرها

وذلك لأن الطول الأول والأخير من المجموعة هما بالطبيعة ضعف الطول الأول والأخير من مجموعة ا ، ب ، حـ . . .

مثال — اذا كانت قطعة خشبية مستديرة طولها ٩,٦٠ مترا وقطاعاتها العرضية هى كما يأتى

$س_٠$ = ٢ مترا مربعا فى الطرف ، $س_١$ = ١,٥ مترا مربعا وهى على بعد ١,٢٠ متر ، $س_٢$ = ١,٢٠ مترا مربعا وهى على بعد ٣ أمتار من القطاع السابق و $س_٣$ = ٠,٩٠ مترا مربعا على بعد ٣,٦٠ مترا من القطاع السابق ، $س_٤$ = ٠,٦٠ مترا مربعا فى الطرف الثانى و بعدها عن القطاع السابق ١,٨٠ فما مكعب تلك القطعة

وأحسن طريقة لترتيب هذه المعاليم هى كما يأتى

أبعاد بالمتر	قطاعات عرضية بالمتر المربع
١,٢٠	٢
٣,٠٠	١,٥٠
٣,٦٠	١,٢٠
١,٨٠	٠,٩٠
	٠,٦٠

والمضاريب التى تدخل فى القطاعات العرضية المتعاقبة هى

١,٢٠ ، (١,٢٠ + ٣,٠٠) ، (٣,٠٠ + ٣,٦٠) ، (٣,٦٠ + ١,٨٠) ، ١,٨٠ .

يمكن اجراء العملية بالاختصار كما هو موضح بعد

الابعاد بالمتر	القطاعات العرضية بالمتر المربع	المضاريب بالمتر	ضعف الحجم بالمتر المكعب
١,٢٠	٢,٠٠	١,٢٠	٢,٤٠٠
٣,٠٠	١,٥٠	٤,٢٠	٦,٣٠٠
٣,٦٠	١,٢٠	٦,٦	٧,٩٢٠
١,٨٠	٠,٩٠	٥,٤٠	٤,٨٦٠
	٠,٦٠	١,٨٠	١,٠٨٠
			٢٢,٥٦

واذن يكون الحجم = $\frac{٢٢,٥٦}{٢}$ = ١١,٢٨ مترا مكعبا

وفى هذا المثال قد انتخبت أبعاد القطاعات بحيث يمكن تطبيق أى طريقة من الطريقتين لأن ١,٢٠ — ٣,٠٠ + ٣,٦٠ — ١,٨٠ = ٠

والأبعاد ا$_1$ ، ب$_1$ ، حـ$_1$ هى ضعف المعاملات المتحصلة بقسمة

١,٢٠ س^3 + ٣,٠٠ س^2 + ٣,٦٠ س + ١,٨٠ على س + ١ ومقاديرها هى

ا$_1$ = ٢,٤٠ متر ، ب$_1$ = ٣,٦٠ متر ، حـ$_1$ = ٣,٦٠ متر ومجموع تلك الأبعاد ٩,٦٠ متر كما يجب أن يكون وهذه طريقة بسيطة للتحقق من دقة مقادير ا$_1$ ، ب$_1$ ، حـ$_1$

وبناء على ذلك يكون الحجم بطريقة القطاعات الواقعة فى الوسط مساويا ٢,٤٠ × ١,٥٠ + ٣,٦٠ × ١,٢٠ + ٣,٦٠ × ٠,٩٠ = ١١,١٦ مترا مربعا وحينئذ يكون مقدار الاختلاف بين هذا الحجم والحجم السابق نحو واحد فى المائة

والمتوسط بين النتيجتين هو ١١,٢٢ مترا مكعبا

وحينئذ يمكن اعتبار الحجم مساويا الى ١١,٢٢ مترا مكعبا وهذا التقدير يمكن اعتباره عقلا مختلفا عن الحجم الحقيقي بأقل من ٠,٠٦ مترا مكعبا أى بنحو نصف من مائة وهذا المقدار يسمى الجزء المئيني المشكوك فيه فاذا أريد أن يكون الحساب أدق من ذلك يلزم أن تقاس قطاعات أكثر عددا مما سبق أو تؤخذ القطاعات على مسافات تسمح باستعمال قانون سمبسون ومع ذلك ففي حالة الأخشاب التى على حالتها الطبيعية اذا أريد الحصول على دقة عظيمة فى تعيين المتوسط بقياس القطاعات العرضية فان النتيجة تكون خادعة وذلك لأن قياس مساحة القطاعات العرضية بغاية الدقة أمر صعب والخطأ فى هذا المقاس يكون أكبر من ١/٢ فى المائة بكثير

١٣٥ — ومتى كانت القطاعات العرضية دائرية فمسائح القطاعات يمكن الحصول عليها إما بقياس الأقطار أو بقياس المحيطات ففي الحالة الأولى تكون المساحة هى ط نق^٢ = ١/٤ ط ق^٢ وفى الحالة الثانية تكون المساحة ١/٤ط م^٢ ، مقدار م هو المحيط = ٢ ط نق ومقدار ط = ٣,١٤١٦ واذن يكون ١/٤ ط = ٠,٧٨٥٤ أو تقريبا ١١/١٤ ، ١/٤ط = ٠,٠٧٩٦ أو نحو ثمانية فى المائة

ومع ذلك فان الجارى عملا فى تقدير أحجام الأخشاب التى ليس شكلها منتظما أن يكون القياس غير دقيق بالمرة فيعين المحيط المتوسط إما بأخذ المتوسط الحسابى لقطاعات متساوية التباعد عن بعضها وإما بالاقتصار على قياس محيط القطاع الواقع فى وسط الطول أو فى أى نقطة بين قطاع وسط الطول وبين الطرف الغليظ ثم يعتبر مربع ربع هذا المحيط قطاعا عرضيا متوسطا فاذا كان م هو المحيط المتوسط المحسوب فالقطاع المتوسط المحسوب بهذه الطريقة هو (١/٤ م)^٢ = ٠,٠٦٢٥ م^٢ وهذا المقدار أقل بكثير من القطاع الحقيقى

والفرق هو مقدار مسموح به لأنه يعدم فى عمليات تنظيم شكل الخشب وهذه هى الطريقة المتبعة فى انكلترا والهند ولكن فى أوروبا يعين الحجم بطرق أدق ولا يترك شىء فى نظير ما يعدم من الخشب

١٣٦ — المتوسط الحسابى لقطاعات مخصوصة

ان القانون الخاص بحساب حجم برميل بدلالة قطاعى نهايتيه وقطاعه الذى فى الوسط هو

$$\frac{ه}{٦}\left(س_ب + ٤\, س_١ + س_٢\right)$$

ومن المفيد أن نلاحظ أن السعة يمكن أيضا تقديرها بقياس قطاعين عرضيين فقط بشرط أن ينتخبا فى أحسن وضع فاذا كان البرميل مخروطا ناقصا أو قطعة كروية ناقصة أو مجسما ناقصيا فان هذه الطريقة تعطى نتيجة مضبوطة وفى أحوال أخرى تكون تقريبية (أنظر مسألة ٣ من تمرينات ١٧)

وينبغى أن تقاس القطاعات على أبعاد من جانبى القطاع الواقع فى الوسط بقدر $\frac{ه}{٢\sqrt{٣}}$ والقطاع المتوسط هو نصف مجموع هذين القطاعين وفى أغلب البراميل يكون هذان القطاعان متساويين ويكون كل منهما حينئذ هو القطاع المتوسط واذن ففى مثل هذه الأحوال يكون من الضرورى قياس قطاع عرض واحد فقط

وأبعاد هذه القطاعات عن طرفى البرميل

$$= \frac{ه}{٢} - \frac{ه}{٢\sqrt{٣}} = \frac{ه}{٦}\left(٣ - \sqrt{٣}\right) = ٠,٢١١٣\ ه$$

أو أزيد قليلا من خمس طول البرميل

وفيما يتعلق بقياس البرميل ينبغى للطالب أن يرجع الى بند ١٩٤ فيجد طريقة سريعة فى تعيين السعة

تمرينات (٢١)

(١) المطلوب ايجاد سعة برميل مقاسه الداخلى كما يأتى — الارتفاع ٠,٩ متر وقطر القاعدة ٠,٦٠ متر والقطر من الوسط ٠,٧٠ متر

(٢) المطلوب بيان أن القطاعين العرضيين لمخروط ناقص على بعدين متساويين (س) من قاعدتيه هما ط [ا + $\frac{س}{هـ}$ (ب — ا)]^{٢} و ط [ب + $\frac{س}{هـ}$ (ا — ب)]^{٢} على التناظر وايجاد المتوسط الحسابى لهذين القطاعين وبيان مقدار زيادة ذلك عن القطاع الواقع فى الوسط

(٣) بين أن القطاع المتوسط للمخروط الناقص يمكن أن يكتب بالصورة

$$\frac{١}{٤} ط [(ا + ب)^{٢} + \frac{١}{٣} (ا — ب)^{٢}]$$

وبين مقدار س الذى به يكون القطاع المتوسط مساويا للمتوسط الحسابى للقطاعين المذكورين فى المسألة السابقة

(٤) المطلوب بيان الخطأ الناشئ عن قياس القطاعين العرضيين على بعد قدره $\frac{١}{٥}$ هـ من النهايتين واعتبار متوسطهما الحسابى قطاعا متوسطا

(٥) جذع شجرة طوله ٧,٢٠ أمتار ومحيطاته على التوالى هى — على بعد ١,٢٠ متر من الأرض يبلغ المحيط ٣ أمتار وعلى بعد ٣,٦٠ أمتار يبلغ ٢,٤٠ أمتار وعلى بعد ٦ أمتار يبلغ ١,٥٠ متر والمطلوب ايجاد حجم الشجرة بفرض أن القطاعات دائرية

(٦) جذع شجرة طوله ١٥ مترا ومحيطاته على التوالى هى ٦ أمتار على بعد ١,٢٠ متر ، ٢,٤٠ على بعد ١,٢٠ متر من القمة وفى القطاع الواقع فى وسط الطول ٣,٦٠ أمتار والمطلوب ايجاد الحجم بفرض أن القطاعات العرضية مستديرة

(٧) القطاعان المتطرفان لقطعة من الخشب مستديرة هما على التناظر ١,٢٠ متر مربع و ٠,٦٠ متر مربع والمحيط الواقع فى الوسط ٣,٣٠ أمتار والمطلوب ايجاد القطاع المتوسط ومقارنتـه بمربع ربع محيط القطاع الذى فى وسط طول الخشبة

(٨) المطلوب حساب القطاع العرضى المتوسط فى الحالة الآتية بالقوانين $ع'$ ، $ع''$ ، $ع'''$ ثم بالقانون ع بفرض أن القطاعات على أبعـاد متساوية ومسائحها بالأمتار المربعة هى $س_{٠}$ = ١٠٨,٠ مترا مربعا ، $س_{١}$ = ٩٢,٤٠ مترا مربعا ، $س_{٢}$ = ٧٦,٣ مترا مربعا ، $س_{٣}$ = ٥٩,٧ مترا مربعا ، $س_{٤}$ = ٤٢,٥ ، $س_{٥}$ = ٢٤,٦٠ مترا مربعا و $س_{٦}$ = ٦,٦٠ أمتار مربعة

(٩) المطلوب حساب حجم جسم طوله ٤٢ مترا وقطاعاته العرضية هى ٢٠ مترا مربعا و ١٦ مترا مربعا و ١٢ مترا مربعا و ٨ أمتار مربعة و ٦ أمتار مربعة وتلك القطاعات مأخوذة على أبعاد من أحد الطرفين قدرها على التوالى ٠ متر و ١٣ مترا و ٢٨ مترا و ٣٦ مترا و ٤٢ مترا (مع ملاحظة أن الأبعاد بين القطاعات تسمح بتطبيق كل من قانون القطاعات التى فى وسط الطول وقانون القطاعات المتطرفة واذن فيلزم استعمالها معا وأخذ الحجم مساويا لمتوسطهما) .

(١٠) المطلوب بيان أنه اذا كان كل من ا ، ب ، ح ، ء هى الأبعاد بين القطاعات المقيسة المتوالية مبتدئا من القطاع $س_{٠}$ لجسم طوله ل = ا + ب + ح + ء فان أبعاد جميع القطاعات الأخرى عن $س_{٠}$ تكون هى معاملات القوى المختلفة للكمية س فى خارج القسمة

$$(اس^{٤} + بس^{٣} + حس^{٢} + ءس - ل) \div (س - ا)$$

وبمثل ذلك فى أى عدد من القطاعات

(١١) المطلوب بيان أنه اذا كانت الأبعاد ا ، ب ، ح ، . . . كميات صحيحة (بالمتر أو بأى وحدة) فان القطاعات العرضية المتطرفة لها لا يمكن أن تكون قطاعات فى وسط مسافات أخرى $ا_١$ ، $ب_١$ ، $ح_١$ . . . الا اذا كان ا + ب + ح + ... عددا زوجيا

(١٢) اذا كان ا ، ب ، ح ... ... هى أبعاد القطاعات المتوالية المقيسة من القطاع الأول س فالمطلوب بيان أن الأبعاد بين القطاعات هى المعاملات للقوى المختلفة للكمية س فى حاصل الضرب

$$(ا\,س^{ن} + ب\,س^{ن-١} + \ldots)\,(س - ١)$$

(١٣) المطلوب بيان أنه اذا كانت القطاعات لجسم طوله ل على أبعـاد قدرها ا ، ب ، ح ... ... عن القطاع س هى القطاعات التى فى الوسط المسافات $ا_١$ ، $ب_١$ ، $ح_١$ ، . . . فيجب تحقق الارتباط

$$ا - ب + ح - \ldots = \pm \tfrac{١}{٢}\,ل$$

وأن المقادير $\tfrac{١}{٢}\,ا_١$ ، $\tfrac{١}{٢}\,ب_١$ ، $\tfrac{١}{٢}\,ح_١$ ... ... هى المعاملات للقوى المختلفة للكمية س فى خارج القسمة

$$[\,ا\,س^{ن} + (ب - ا)\,س^{ن-١} + (ح - ب)\,س^{ن-٢} + \ldots\,]$$
$$\div\,(س + ١)$$

(١٤) قسم جسم الى أربعة أقسام وكانت أبعاد قطاعاتها التى فى الوسط عن احدى نهايتى الجسم هى ٤ أمتار و ١٤ مترا و ٢٥ مترا و ٣٣ مترا على التوالى فما مقدار الحجم اذا كانت مساحة هذه القطاعات هى على التناظر ١٤ و ١٠ و ٨ و ٧ أمتار مربعة

(١٥) اذا كان القطاعان المتطرفان فى المسألة السابقة هما ٢٠ مترا مربعا و ٦ أمتار مربعة فالمطلوب حساب الجسم بواسطة قانون القطاعات المتطرفة وايجاد المقدار المئينى للخطأ المحتمل وجوده فى متوسط الحسابين

(١٦) جسم طوله ٢٤ مترا وقطاعاته مستديرة قسم الى أقسام طول كل منها ٦ أمتار وكان طول المحيطات الواقعة فى وسط طول تلك الأقسام هو ١٠ أمتار و ١٢ مترا و ٩ أمتار و ٥ أمتار على التناظر والمطلوب ايجاد الجسم

(١٧) أقطار القطاعين المتطرفين فى الجسم السابق قيست أيضا فوجد أنها على التناظر $\frac{١}{٢}$ ٢ متر ومتر واحد والمطلوب ايجاد الجسم بواسطة قانون القطاعات المتطرفة ومقارنة النتائج

(١٨) مخروط ناقص قسم الى جزأين متساويى الطول والمطلوب حساب مسائح القطاعات الواقعة فى وسط طول كل منهما بمعلومية أن ا ، ب هما نصفا قطرى القاعدتين (أنظر المسألة الثانية من هذا التمرين)

(١٩) المطلوب حساب حجم المخروط الناقص بواسطة قانون القطاع الواقع فى وسط الطول باستعمال القطاعين الواقعين فى وسط الطول فى المسألة السابقة — وبيان أن الجسم أقل من الحقيقة بقدر $\frac{\text{ط هـ}}{٤٨}(\text{نق} - \text{نقَ})^{٢}$ و هـ هو ارتفاع المخروط الناقص

(٢٠) قسم مخروط ناقص الى قسمين طولها على التناظر س ، ص (بحيث يكون س + ص = هـ) والمطلوب بيـان أن الجسم المحسوب بدلالة هذه الأطوال بواسطة قانون القطاعات التى فى وسط الطول

$$= \frac{\text{ط هـ}}{٤}\left[(\text{نق} + \text{نقَ})^{٢} + \frac{\text{س ص}}{\text{هـ}^{٢}}(\text{نق} - \text{نقَ})^{٢}\right]$$

(٢١) المطلوب بيان أنه من المستحيل أن ينتخب الطول س ، ص بحيث تعطى طريقة القطاع الواقع فى الوسط حجما صحيحا وان أقل خطأ يحصل حينما يكون س = ص

(٢٢) المطلوب ايجاد مساحة القطاع العرضى لقطعة كروية ناقصة على بعد قدره س من القاعدة التى نصف قطرها يساوى ا_{1} وذلك بفرض أن المساحة هى على الصورة ا + ب س + ح س^{2} وايجاد مقادير ا ، ب ، ح بأن يوضع على التوالى س = ٠ ، $\frac{1}{2}$ هـ ، هـ

(٢٣) المطلوب ايجاد المتوسط الحسابى للقطاعات على بعد قدره س من كل قاعدة ثم ايجاد مقدار س الذى به يكون المتوسط المذكور مساويا للقطاع المتوسط للقطعة الكروية الناقصة

(٢٤) قطعة كروية ناقصة مقسومة الى قسمين طولهما على التناظر س ، ص والمطلوب بيان أن الحجم المحسوب بدلالة هذين الطولين بواسطة قانون القطاع الواقع فى وسط الطول =

$$\text{ط هـ} \left[\frac{1}{2}\left(\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\text{هـ}^{2} - \text{س ص}\right) \right]$$

(٢٥) المطلوب بيان أن أقل خطأ فى استعمال هذا القانون السابق يحصل حينما يكون س = ص ثم ايجاد مقدار هذا الخطأ ثم امتحان الناتج بالاستعانة بمسألة ٢٣ السابقة وذلك بأن يوضع $\frac{1}{4}$ هـ بدلا من س فى قانون المتوسط الحسابى

طرق عمومية لايجاد القطاع العرضى المتوسط من جملة قطاعات عرضية متوازية متساوية التباعد

١٣٧ — قانون سمبسون

وفضلا عن قانون سمبسون الذى استعملناه للآن فان هناك قانونا آخر يسمى القانون الثانى لسمبسون ويطبق على أربعة قطاعات متساوية التباعد عن بعضها وقد يكون من المفيد فى بعض الأحيان استعماله ولأجل التمييز يطلق اسم قانون سمبسون الأول على القانون الذى استعمل فيما سبق الى الآن وهذان القانونان اللذان استنبطهما فى أول الأمر كوتس ونيوتون أدخلهما فى علم تقدير السطوح والأحجام العملى توماس سمبسون الذى كان أستاذا للرياضة فى المدرسة الحربية الملوكية فى وولوش بانجلترا من سنة ١٧٤٣ الى سنة ١٧٦١

والقانون الأول لسمبسون هو أنه اذا كان $س_٠$ ، $س_١$ ، $س_٢$ ثلاثة قطاعات متوازية ومتساوية التباعد لجسم فان القطاع العرضى المتوسط لجزء الجسم المحصور بين $س_٠$ ، $س_٢$ هو حسبما يعين من هذا العدد من القطاعات

$$\frac{١}{٦}(س_٠ + ٤س_١ + س_٢)$$

وهذا هو القانون الذى سبق لنا استعماله كثيرا

والقانون الثانى لسمبسون هو أنه اذا كانت $س_٠$ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ أربع قطاعات متساوية التباعد لجسم فان القطاع العرضى المتوسط لجزء منه محصور بين $س_٠$ ، $س_٣$ هو حسبما يعين من هذا العدد من القطاعات :

$$\frac{١}{٨}(س_٠ + ٣س_١ + ٣س_٢ + س_٣)$$

وفى الأجسام البسيطة والقطع الناقصة منها $س_{٠} + ٣ س_{٢} = ٣ س_{١} + س_{٣}$
وعلى ذلك يكون القطاع المتوسط فى مثل هذه الأحوال يساوى

$$\frac{١}{٤} (س_{٠} + ٣ س_{٢})$$

ثم ان القانون الأوّل أكثر استعمالا من الثانى وأضبط بالنسبة لعدد معلوم من القطاعات الا أن القانون الثانى يمكن استعماله أحيانا متى كان عدد القطاعات المقيسة لا يسمح باستعمال القانون الأول . فمثلا اذا كان عدد القطاعات العرضية أربعة فلا يمكن استعمال القانون الأول لأن جزأ من الجسم يترك فى هذه الحالة بلا تقدير واذا فلا بد من استعمال القانون الثانى ثم اذا كان عدد القطاعات العرضية ستة قاسمة للجسم الى خمسة أجزاء فيمكن الحصول على جزأين بالقانون الأوّل والثلاثة الباقية بالقانون الثانى واذا كان عدد القطاعات العرضية سبعة قاسمة للجسم الى ستة أقسام فانه يمكن استعمال القانون الأول أو الثانى أو كلاهما على انفراده ليحقق كل واحد منهما الآخر فباستعمال القانون الأول يكون القطاع المتوسط هو

$$\frac{١}{١٨} (س_{٠} + ٤ س_{١} + ٢ س_{٢} + ٤ س_{٣} + ٢ س_{٤} + ٤ س_{٥} + س_{٦})$$

وبالقانون الثانى يكون

$$\frac{١}{١٦} (س_{٠} + ٣ س_{١} + ٣ س_{٢} + ٢ س_{٣} + ٣ س_{٤} + ٣ س_{٥} + س_{٦})$$

١٣٨ — قانون ودل

ومع هذين القانونين فان هناك قانونا أدق منهما يمكن تطبيقه فى حالة وجود سبعة قطاعات متساوية التباعد قاسمة للجسم الى ستة أقسام متساوية والقطاع المتوسط الذى يعين بهذا القانون المسمى بقانون ودل هو

$$\frac{١}{٢٠} (س_{٠} + ٥ س_{١} + س_{٢} + ٦ س_{٣} + س_{٤} + ٥ س_{٥} + س_{٦})$$

وهذا القانون سهل التطبيق جدًا ويجب استعماله متى كان عدد القطاعات العرضية يسمح بذلك

ففى حالة وجود سبعة قطاعات عرضية متساوية التباعد يكون لتعيين القطاع العرضى المتوسط ثلاث طرق

(١) بقانون سمبسون الأول ويساوى

$$\frac{1}{18}\left(\text{س}_0 + 4\,\text{س}_1 + 2\,\text{س}_2 + 4\,\text{س}_3 + 2\,\text{س}_4 + 4\,\text{س}_5 + \text{س}_6\right)$$

(٢) وبقانون سمبسون الثانى ويساوى

$$\frac{1}{16}\left(\text{س}_0 + 3\,\text{س}_1 + 3\,\text{س}_2 + 2\,\text{س}_3 + 3\,\text{س}_4 + 3\,\text{س}_5 + \text{س}_6\right)$$

(٣) وبقانون ودل ويساوى

$$\frac{1}{20}\left(\text{س}_0 + 5\,\text{س}_1 + \text{س}_2 + 6\,\text{س}_3 + \text{س}_4 + 5\,\text{س}_5 + \text{س}_6\right)$$

مثال — المطلوب ايجاد القطاع العرضى المتوسط بكل من الطرق الثلاث فى الحالة الآتية :

$\text{س}_0 = 1000$

$\text{س}_1 = 985$

$\text{س}_2 = 940$

$\text{س}_3 = 866$

$\text{س}_4 = 766$

$\text{س}_5 = 643$

$\text{س}_6 = 500$

فيجب أن توضع المسائح بحيث تكون مرتبة على حسب المضاريب المطلوبة كما سيبين فيما بعد وينبغى أن يلاحظ أنه فى حالة تطبيق قانون ودل يكون القطاع الذى فى وسط الطول داخلا فى كل من العمودين وهو أمر يضمن ضربه فى ٦ بدون اجراء عملية خاصة

قانون سمبسون الأول		قانون سمبسون الثانى		قانون ودل	
$س_{١}$ = ٩٨٥ $س_{٣}$ = ٨٦٦ $س_{٥}$ = ٦٤٣ ٢٤٩٤ ٤ ٩٩٧٦	$س_{٢}$ = ٩٤٠ $س_{٤}$ = ٧٦٦ ١٧٠٦ ٢ ٣٤١٢	$س_{٠}$ = ١٠٠٠ $س_{٣}$ = ٨٦٦ $س_{٣}$ = ٨٦٦ $س_{٦}$ = ٥٠٠ ٣٢٣٢	$س_{١}$ = ٩٨٥ $س_{٢}$ = ٩٤٠ $س_{٤}$ = ٧٦٦ $س_{٥}$ = ٦٤٣ ٣٣٣٤	$س_{٠}$ = ١٠٠٠ $س_{٢}$ = ٩٤٠ $س_{٣}$ = ٨٦٦ $س_{٤}$ = ٧٦٦ $س_{٦}$ = ٥٠٠ ٤٠٧٢	$س_{١}$ = ٩٨٥ $س_{٣}$ = ٨٦٦ $س_{٥}$ = ٦٤٣ ٢٤٩٤
٩٩٧٦ = ٤ ($س_{١}+س_{٣}+س_{٥}$) ٣٤١٢ = ٢ ($س_{٢}+س_{٤}$) ١٠٠٠ = $س_{٠}$ ٥٠٠ = $س_{٦}$ ١٤٨٨٨ ÷ ٢ = ٧٤٤٤ ÷ ٩ = ٨٢٧ $\frac{١}{٩}$		٣٣٣٤ × ٣ = ١٠٠٠٢ ٣٢٣٢ ١٣٢٣٤ ÷ ٢ = ٦٦١٧ ÷ ٨ = ٨٢٧ $\frac{١}{٨}$		١٢٤٧٠ = ٥ ($س_{١}+س_{٣}+س_{٥}$) ٤٠٧٢ ١٦٥٤٢ ÷ ٢٠ = ٨٢٧,١	

الجواب بقانون سمبسون الأول = $\frac{١}{٩}$ ٨٢٧

» » الثانى = $\frac{١}{٨}$ ٨٢٧

» ودل ٨٢٧,١

أى أن المتوسط بالقانون $\frac{١}{٦}$ ($س_{٠}$ + ٤ $س_{٣}$ + $س_{٦}$) يساوى $\frac{١}{٣}$ ٨٢٧ وبمقتضى القانون $\frac{١}{٨}$ ($س_{٠}$ + ٣ $س_{٢}$ + ٣ $س_{٤}$ + $س_{٦}$) يساوى $\frac{١}{٤}$ ٨٢٧ ومن هنا يرى أن التقريب الأول فى القانون قريب جدا من أدق الطرق لتعيين المتوسط ومتى حصل ذلك فان المتوسط المستخرج يمكن التعويل عليه فى تعيين أكبر مقدار للحجم

١٣٩ — وفى حالة ما تعطى القوانين المختلفة مقادير مختلفة للمتوسط فان المقدار المعين بقانون ودل هو الأقرب الى الضبط الا أنه من الواضح أن الحجم المضبوط لا يتعلق بالقطاعات السبعة التى قيست بل يتعلق أيضا بشكل الجسم فيما بين تلك القطاعات وهذه القوانين مبنية على فرض أن هناك تغيرا تدريجيا فى القطاع فى جميع الطول وما يوجد فى الجسم من البروز ينبغى أن يلاحظ حين أخذ المقاسات ثم يحسب مقدارها ضمنا فى هـذه المقاسات أو تحسب على حدتها والا فليس فى الامكان أن يقـال بأن قانونا مؤسسا على قيـاس عدد معين من القطاعات يؤدى الى نتيجة مضبوطة

١٤٠ — وترتيب القوانين من حيث دقتها أو بحسب ما يرى من الدقة المحتملة فيها مع ذكر القانونين اللذين لا تدخل فيهما جميع القطاعات المقيسة ضمن هذا الترتيب هو كما يأتى مرتبة بعكس الدقة

اذا كان $ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$ هى مقادير المتوسطات المتحصلة بتطبيق قانون سمبسون الأول مرة أو مرتين أو ثلاث مرات ، $ب_1$ ، $ب_2$ هما المتوسطان المتحصلان بتطبيق قانون سمبسون الثانى مرة أو مرتين ، $و_1$ هو المتوسط المتحصل بتطبيق قانون ودل مرة فانه يكون

$$ا_1 = \frac{1}{6}(س_0 + ٤س_3 + س_6)$$

$$ب_1 = \frac{1}{8}(س_0 + ٣س_2 + ٣س_4 + س_6)$$

$$ب_2 = \frac{1}{16}(س_0 + ٣س_1 + ٣س_2 + ٢س_3 + ٣س_4 + ٣س_5 + س_6)$$

$$ا_3 = \frac{1}{18}(س_0 + ٤س_1 + ٢س_2 + ٤س_3 + ٢س_4 + ٤س_5 + س_6)$$

$$و_1 = \frac{1}{20}(س_0 + ٥س_1 + س_2 + ٦س_3 + س_4 + ٥س_5 + س_6)$$

١٤١ — وفى القوانين السابقة $\text{و}_{١}$ هى أدقها بما لا يقدر الا أنه بالجمع بين القوانين المذكورة قد استنتج مقداران يقربان فى الضبط من المقدار $\text{و}_{١}$ وهما $\frac{٨١\,\text{ا}_{٣} - \text{ا}_{١}}{٨٠}$ ، $\frac{١٦\,\text{ب}_{٢} - \text{ب}_{١}}{١٥}$ (ويكونان مضبوطين تماما اذا كانت $\text{و}_{١}$ مضبوطة) ثم ان هناك مقدارا آخر يتحد تماما مع $\text{و}_{١}$ وهو $\frac{٩\,\text{ا}_{٣} - ٤\,\text{ب}_{٢}}{٥}$

فاذا رمز بحرف ح للمقدار $\frac{٨١\,\text{ا}_{٣} - \text{ا}_{١}}{٨}$ وبحرف ء للمقدار $\frac{١٦\,\text{ب}_{٢} - \text{ب}_{١}}{١٥}$ فأضبط قانون يمكن الحصول به على القطاع المتوسط من قياس سبعة قطاعات هو أحد هذين القانونين المتكافئين وهما $\frac{٩\,\text{و}_{١} - ٢\,\text{ح}}{٧}$ ، $\frac{٨\,\text{و}_{١} - \text{ء}}{٧}$

١٤٢ — ولأجل الحصول على الحجم يلزم ضرب القطاع العرضى المتوسط فى الطول أى فى المسافة (ل) التى بين القطاعين النهائيين أو بدلا من تميم عملية ايجاد القطاع المتوسط وضرب الناتج فى ل يمكن أن نضرب ستة أمثال القطاع المتوسط فى الطول لَ بين قطاعين متواليين لأن $\text{ل}' = \frac{١}{٦}\,\text{ل}$ وعلى ذلك يكون مقدار الحجم المتحصل من سبعة قطاعات هو أحد المقادير الآتيـة

$$\frac{١}{٣}\,\text{ل}'\,(\text{س}_{٠} + ٤\,\text{س}_{١} + ٢\,\text{س}_{٢} + ٤\,\text{س}_{٣} + ٢\,\text{س}_{٤} + ٤\,\text{س}_{٥} + \text{س}_{٦})\ \text{أو}$$

$$\frac{٣}{٨}\,\text{ل}'\,(\text{س}_{٠} + ٣\,\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} + ٢\,\text{س}_{٣} + ٣\,\text{س}_{٤} + ٣\,\text{س}_{٥} + \text{س}_{٦})\ \text{أو}$$

$$\frac{٣}{١٠}\,\text{ل}'\,(\text{س}_{٠} + ٥\,\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + ٦\,\text{س}_{٣} + \text{س}_{٤} + ٥\,\text{س}_{٥} + \text{س}_{٦})$$

وفى حالة اختلاف النتائج فالأظهر أن المقدار الأخير هو الأقرب للصواب

تمرينـات (٢٢)

(١) المطلوب اثبات أن $٩ ا_٣ - ٤ ب_٢ = ٥ و_١$

(٢) المطلوب اثبات أن $٢ حـ - ء = و_١$

(٣) اذا كان $و_١$ مفروضا أنه المقدار المضبوط فالمطلوب البرهنة بموجب الارتباطات المبينة فى بند ٦٤ على أنه

(ا) اذا وجد خطأ فى مقدار $ا_١$ فانه يكون أكبر من الخطأ فى $ا_٣$ بقدر ٨١ مرة

(ب) وان الخطأ فى $ب_١$ أكبر من الخطأ فى $ب_٢$ بقدر ١٦ مرة

(حـ) وأن الخطأ فى $ب_٢$ أكبر من الخطأ فى $ا_٣$ بقدر $\frac{١}{٤}$ ٢ مرة

(ء) بمساعدة ما ذكر فى المثال السابق المطلوب المقارنة بين الخطأ فى $ا_١$ والخطأ فى $ب_١$

(٥) المطلوب ايجاد القطاع العرضى المتوسط لجسر بمعلومية المسائح الآتية للقطاعات العرضية التى على أبعاد متساوية بما فيها القطاعان المتطرفان وهى ١٠٨٠,١ ، ٩٢٤,٤ ، ٧٦٣,٤ ، ٥٩٦,٩ ، ٤٢٥,١ ، ٢٤٧,٩ ، ٦٥,٤ مترا مربعا وايجاد مقادير $ا_١$ ، $و_١$ اللذين يكونان فى هذه الحالة متساويين تقريبا

(٦) المطلوب ايجاد القطاع العرضى المتوسط حينما تكون مسائح القطاعات المتساوية التباعد بالمتر المربع هى ٢٧٥٥,٧ ، ١٣٥٢٨,١ ، ٨٠٢٧,٧ ، ١٤٤٥,٠ ، ١٠٩,٣ ، ٤,١ ، ٠,١ باستعمال القوانين $ب_٢$ ، $ا_٣$ ، $و_١$ وامتحان النتيجة بمساعدة الارتباط $٩ ا_٣ - ٤ ب_٢ = ٥ و_١$

(٧) فى المثال السابق ذكره المطلوب معرفة مقادير $\text{ا}_{١}$ و $\text{ب}_{١}$ ثم استخراج مقدار حـ ، ء باستعمال المعادلتين $\text{حـ} = \text{ا}_{٣} + \frac{١}{٨٠}(\text{ا}_{٣} - \text{ا}_{١})$

$$\text{ء} = \text{ب}_{٢} + \frac{١}{١٥}(\text{ب}_{٢} - \text{ب}_{١})$$

(٨) فى المثال السابق المطلوب ايجاد أدق مقدار للتوسط بواسطة كلا المقدارين $\text{و}_{١} + \frac{٢}{٧}(\text{و}_{١} - \text{حـ})$ ، $\text{و}_{١} + \frac{١}{٧}(\text{و}_{١} - \text{ء})$ وذلك باستعمال أحد المقدارين لتحقيق المقدار الثانى

(٩) المطلوب ايجاد حجم التراب الداخل فى تكوين جسر طوله ٦٠٠ متر اذا كانت القطاعات العرضية على أبعاد متساوية مقدار كل منها ١٠٠ متر هى على التناظر ١٩٥ ، ١٧٤٧ ، ٢٤١٤ ، ٢٤٥٨ ، ٢١١٠ ، ١٥٦١ ، ٩٧٠ مترا مربعا .

١٤٣ — اذا كانت القطاعات المعلومة أقل من سبعة قطاعات متساوية التباعد عن بعضها ففى هذه الحالة لا يمكن تطبيق قانون ودل الا أنه يمكن استعمال أحد قانونى سمبسون أو كليهما الا فى حالة ما اذا لم يكن معلوما سوى القطاعين المتطرفين ففى هذه الحالة يكون من الضرورى استعمال بعض طرق خصوصية متعلقة بشكل الجسم المعلوم أو المفروض بين القطاعين وسنشير الى هذه الحالة أيضا فى المبحث الخاص بكيفية حساب قطاعات الحفر والردم الا أنه فى أكثر الأحوال يكون الأصوب أن تقاس مقاسات أخرى منها يمكن حساب القطاع الواقع فى الوسط ثم يطبق قانون سمبسون الأول ولذا لا نتكلم بعد ما تقدم على هذه الحالة فى هذا الفصل

١٤٤ — اذا علمت ثلاثة قطاعات قاسمة للجسم الى جزأين فيمكن تطبيق قانون سمبسون الأول ويكون مقدار القطاع المتوسط هو

$$\text{ا}_{١} = \frac{١}{٦}(\text{س} + ٤\,\text{س}_{١} + \text{س}_{٢})$$

ويكون الحجم هو $ل\ ا_١$ أو $\frac{١}{٣}\ ل\ (س_• + ٤\ س_١ + س_٢)$

١٤٥ — واذا علمت أربعة قطاعات قاسمة للجسم الى ثلاثة أقسام فيجب استعمال قانون سمبسون الثانى فيكون القطاع المتوسط هو

$$ب_١ = \frac{١}{٨}\ (س_• + ٣\ س_١ + ٣\ س_٢ + س_٣)$$

ويكون الحجم مساويا الى $ل\ ب_١ = \frac{٣}{٨}\ لَ\ (س_• + ٣س_١ + ٣س_٢ + س_٣)$

١٤٦ — واذا علمت خمسة قطاعات قاسمة للجسم الى أربعة أجزاء فان القطاع المتوسط يمكن تحصيله إما بالقانون التقريبي

$$ا_١ = \frac{١}{٦}\ (س_• + ٤\ س_٢ + س_٤)$$

أو بالقانون الأضبط وهو

$$ا_٢ = \frac{١}{١٢}\ (س_• + ٤\ س_١ + ٢\ س_٢ + ٤\ س_٣ + س_٤)$$

وأحسن طريقة هى ايجاد كل من $ا_١$ و $ا_٢$ وفى كثير من الأحوال قد تتحد مقاديرهما أو تتقارب بحيث يكتفى الحاسب بالاقتصار على مقدار $ا_٢$ لأن اتحاد المقدارين هو ضمانة للضبط وفضلا عن ذلك فاذا وجد فرق كبير بين المقدارين (ولم يكن ذلك ناشئا عن غلط فى الحساب نفسه) فانه يمكن الجمع بينهما واستخراج قانون أضبط بكثير مما ذكر لأنه يكون مضبوطا ضبطا يعادل ما يتحصل من الخمسة القطاعات وذلك القانون هو

$$\text{القطاع المتوسط} = \frac{١٦ا_٢ - ا_١}{١٥}$$

وهذا القانون يمكن أن يكتب هكذا $ا_٢ + \frac{١}{١٥}\ (ا_٢ - ا_١)$

(وينبغى مقارنة هذا القانون مع القانون الدقيق المستخرج من $ب_١$ و $ب_٢$ فى حالة وجود سبع قطاعات معلومة بند ١٤١)

١٤٧ — اذا علمت ستة قطاعات متساوية التباعد بحيث تقسم الجسم الى خمسة أجزاء فانه يمكن أن يستعمل قانون سمبسون الأول فى ايجاد حجم جزأى الجسم من احدى نهايتيه وقانون سمبسون الثانى فى ايجاد حجم الثلاثة الأجزاء الباقية أو يستعمل قانون سمبسون الأول فى أربعة أجزاء من الجسم ثم يقدّر الجزء الخامس بأى طريقة خاصة أو تستعمل الطريقة الآتية التى هى أكثر تماثلا

فبقانون سمبسون الأول يكون الحجم المحصور بين القطاعين $\text{س}_٠$ ، $\text{س}_٤$ $= \frac{١}{٣}\,\text{ل}\,(\text{س}_٠ + ٤\,\text{س}_١ + ٢\,\text{س}_٢ + ٤\,\text{س}_٣ + \text{س}_٤)$

والحجم المحصور بين $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٥$ $= \frac{١}{٣}\,\text{ل}\,(\text{س}_١ + ٤\,\text{س}_٢ + ٢\,\text{س}_٣ + ٤\,\text{س}_٤ + \text{س}_٥)$

ومجموع هذين المقدارين

$$= \frac{١}{٣}\,\text{لَ}\,(\text{س}_٠ + ٥\,\text{س}_١ + ٦\,\text{س}_٢ + ٦\,\text{س}_٣ + ٥\,\text{س}_٤ + \text{س}_٥)$$

وهو أكبر من الحقيقة بمقدار الحجم المحصور بين $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٤$ الذى هو بموجب قانون سمبسون الثانى $\frac{٣}{٨}\,\text{لَ}\,(\text{س}_١ + ٣\,\text{س}_٢ + ٣\,\text{س}_٣ + \text{س}_٤)$ فبطرح هذه الزيادة وملاحظة أن $\frac{٣}{٨} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢٤}$ فان القانون النهائى يكون $\frac{١}{٣}\,\text{ل}\,(\text{س}_٠ + ٤\,\text{س}_١ + ٣\,\text{س}_٢ + ٣\,\text{س}_٣ + ٤\,\text{س}_٤ + \text{س}_٥)$

$$- \frac{١}{٢٤}\,\text{لَ}\,(\text{س}_١ + ٣\,\text{س}_٢ + ٣\,\text{س}_٣ + \text{س}_٤)$$

وهذا المقدار فى نهاية الضبط .

والقطاع العرضى المتوسط المستخرج من هذا القانون هو

$$\text{م}_١ = \frac{١}{١٥}\,(\text{س}_٠ + ٤\,\text{س}_١ + ٣\,\text{س}_٢ + ٣\,\text{س}_٣ + ٤\,\text{س}_٤ + \text{س}_٥)$$

$$- \frac{١}{١٢٠}\,(\text{س}_١ + ٣\,\text{س}_٢ + ٣\,\text{س}_٣ + \text{س}_٤)$$

ومع ذلك فهناك قانونان أكثر اختصارا يمكن تطبيقهما فى هذه الحالة مع أن كل واحد منهما ليس دقيقا على انفراده كدقة القانون المتقدم الا أنه يمكن الجمع بينهما لانتاج قانون أضبط ومع ذلك فالأحسن أن يحسب بموجب قانونين متى كان ذلك ممكنا حتى يمكن أن يحقق أحدهما الآخر والقانونان المذكوران هما (للقطاع العرضى المتوسط)

$$م_{٢} = \frac{١}{٢٤}\left(٢\,س_{٠} + ٥\,س_{١} + ٥\,س_{٢} + ٥\,س_{٣} + ٥\,س_{٤} + ٢\,س_{٥}\right)$$

$$م_{٣} = \frac{١}{٢٤}\left(س_{٠} + ٨\,س_{١} + ٣\,س_{٢} + ٣\,س_{٣} + ٨\,س_{٤} + س_{٥}\right)$$

والقانون الذى يعطى أحسن مقدار للمتوسط حسبما يستخرج من قياس ستة قطاعات هو $\frac{١}{١٢}\left(٧\,م_{٢} + ٥\,م_{٣}\right)$

وهذا القانون يمكن أن يكتب هكذا

$$م_{٣} + \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{١٢}\right)\left(م_{٢} - م_{٣}\right)$$

والفرق بين $م_{٢}$ ، $م_{٣}$ هو $\frac{١}{٢٤}\left(س_{٠} - ٣\,س_{١} + ٢\,س_{٢} + ٢\,س_{٣} - ٣\,س_{٤} + س_{٥}\right)$

فى حالة ما تكون المقادير الرقمية لكل من $م_{٢}$ ، $م_{٣}$ غير متساوية يكون من الصواب حساب هذا الفرق على انفراده للتحقق من أن عدم التساوى ليس ناشئا من خطأ فى الحساب

مثـال :

المطلوب ايجاد متوسط القطاعات الكائنة على أبعاد متساوية ومساحة كل منها هى ٠ ، ٢٠ ، ١٤١ ، ٣٨٣ ، ١٠٦٨ ، ٣٨٢٠ مترا مربعا

$م_{٢}$		$م_{٣}$			$م_{٢} - م_{٣}$
٠	٢٠	٠	٢٠	١٤١	$س_{٠} + س_{٥} = ٣٨٢٠$
٧٦٤٠	١٤١	٣٨٢٠	١٠٦٨	٣٨٣	$٢(س_{٢} + س_{٣}) = ١٠٤٨$
٨٠٦٠	٣٨٣	٨٧٠٤	١٠٨٨	٥٢٤	٤٨٦٨
١٥٧٠٠	١٠٦٨	١٥٧٢	٨	٣	$٣(س_{١} + س_{٤}) = ٣٣٦٤$
÷ ٤ =	١٦١٢	١٤٠٩٦	٨٧٠٤	١٥٧٢	١٦٠٤
٣٩٢٥	٥	١٤٠٩٦ ÷ ٤ =			÷ ٤ =
÷ ٦ =	٨٠٦٠	٣٤٥٢ ÷ ٦ =			٤٠١
$م_{٢} = ٦٥٤ \frac{١}{٦}$		$م_{٣} = ٥٨٧ \frac{١}{٣}$			÷ ٦ =
		ضم $\frac{٥}{١٢}$ ٣٣ $= \frac{١}{٢}(م_{٢} - م_{٣})$			$م_{٢} - م_{٣} = ٦٦ \frac{٥}{٦}$
		، ٥ $\frac{١}{٢}$ + $= \frac{١}{١٢}(م_{٢} - م_{٣})$			
		∴ $\frac{١}{٤}$ ٦٢٦ = المتوسط الحقيقى			

وهذا المثال انما انتخب لغرض بيان انه قد يكون الفرق جسيما بين $م_{٢}$ ، $م_{٣}$ الا أنه حتى فى هذه الحالة يكون مقدار $م_{١}$ قريبا جدا من الحقيقة وأحسن طريقة للعمل بموجب هذا القانون موضحة فيما يلى .

القانون هو

$$م_{١} = \frac{١}{١٥}\left[(س_{٠} + ٤س_{١} + ٣س_{٢} + ٣س_{٣} + ٤س_{٤} + س_{٥})\right.$$
$$\left. - \frac{١}{٨}(س_{١} + ٣س_{٢} + ٣س_{٣} + س_{٤})\right]$$

س$_{٠}$ = ٠	س$_{١}$ = ٢٠	س$_{٢}$ = ١٤١
س$_{٥}$ = ٣٨٢٠	س$_{٤}$ = ١٠٦٨	س$_{٣}$ = ٣٨٣
٤(س$_{١}$+س$_{٤}$) = ٤٣٥٢	س$_{١}$+س$_{٤}$ = ١٠٨٨	س$_{٢}$+س$_{٣}$ = ٥٢٤
٣(س$_{٢}$+س$_{٣}$) = ١٥٧٢	٣(س$_{٢}$+س$_{٣}$) = ١٥٧٢	
٩٧٤٤	= ٢٦٦٠ ÷ ٨	
يطرح منه $\frac{1}{2}$ ٣٣٢	= $\frac{1}{2}$٣٣٢	
= $\frac{1}{2}$ ٩٤١١ ÷ ٣		
= $\frac{1}{6}$ ٣١٣٧ ÷ ٥		
= $\frac{13}{30}$٦٢٧ = م$_{١}$		

ومن هنا يتضح أن هذا القانون يحدث خطأ فى المقدار المتوسط مساويا للوحدة فقط حتى فى حالة ما يكون م$_{٢}$ ، م$_{٣}$ مختلفين بأكثر من ٦٦ وحدة وبناء على ذلك يظهر أنه هو الأحسن فى جميع الأغراض العملية الا فيما يتعلق بتحقيق الحساب وفضلا عن ذلك فانه فى ايجاد الجسم بواسطة م$_{١}$ لا ضرورة للقسمة الأخيرة على ٥ والجسم يساوى $\frac{1}{6}$ ٣١٣٧ مضروبا فى الطول لَ الواقع بين قطاعين متواليين

تمرينات (٢٣)

المعلوم المجموعات التسعة الآتية للقطاعات العرضية المتساوية التباعد بما فيها القطاعات المتطرفة والمطلوب ايجاد الأجسام فى كل حالة مع العلم بأن البعد بين كل قطاعين متواليين هو ١٠٠ متر على التناظر

(١) ٣٠١,٠٣ ، ٤٧٧,١٢ ، ٦٠٢,٠٦ مترا مربعا

(٢) ١٥٠٦ ، ١٧٧٣ ، ٢٠١٧ ، ٢٢٣٨ مترا مربعا

(٣) ٢٨٥ ، ٢٩٨ ، ٢٩٩ ، ٢٨٨ مترا مربعا

(٤) ١٤٢٢٦,٣ ، ٣٣٩٥٨,٥ ، ٤٤١٥٨,٧ ، ٤٣٨٥٤,٨ ، ٤٣٦١١,٩ مترا مربعا

(٥) ٢٠٦٦ ، ٢٤١٨ ، ٢٤٧٧ ، ٢٠٧٧ ، ١٠٢٨ مترا مربعا

(٦) ١٧٦,٨ ، ٢٤٠,٣ ، ٢٤٣,٤ ، ١٨٨,١ ، ٩٠,٢ « «

(٧) ٨٦ ، ٢١٨ ، ٣٤٦ ، ٤٧٠ ، ٥٨٨ ، ٦٩٩ « «

(٨) ٧٨٦ ، ١٣٩٧ ، ١٦٨٥ ، ١٦٠١ ، ١١٨١ ، ٥٣٣ « «

(٩) ١٦٥٣ ، ٢٦٨٨ ، ٣٢١٣ ، ٣٣٢٨ ، ٣١٢٥ ، ٣٦٨٨ « «

(١٠) المطلوب بيان أن القانون $م_1$ لمتوسط ستة قطاعات عرضية متساوية التباعد يختلف عن المتوسط الحقيقي الذى مقداره $\frac{1}{12}(7م_2 + 5م_3)$ بقدر $\frac{1}{60}(م_2 - م_3)$ أى بقدر

$$\frac{1}{1440}(س_0 - 3س_1 + 2س_2 + 2س_3 - 3س_4 + س_5)$$

(١١) المطلوب بيان أنه اذا كان

$$س - 3س_1 + 2س_2 + 2س_3 - 3س_4 + س_5 = 0$$

فان جميع القوانين الخاصة بالقطاع المتوسط فى القطاعات الستة المتساوية التباعد تعطى نتيجة واحدة أى أن $م_1 = م_2 = م_3$

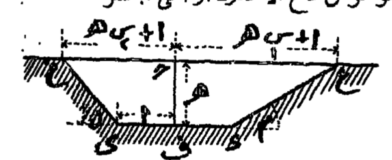
(١٢) المطلوب بيان أن $5م_1 = 3م_2 + 2م_3$

الفصل السابع

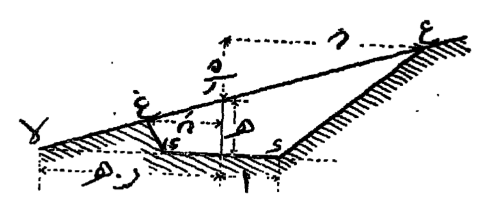
تقدير الحفر والردم

أولا — مسائح القطاعات

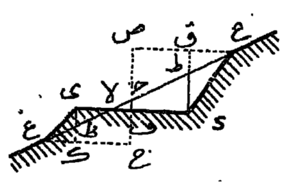
١٤٨ — ان ما يدخل تقديره فى هذا البحث هو ما يلزم ازالته فى حفر أخدود لطريق أو لسكة حديد أو ما يلزم اضافته لعمل جسر فالقطاع العرضى لهذا الجسر أو ذلك الأخدود هو شكل رباعى أحد أضلاعه أفقى وعرضه على العموم واحد فى جميع المسافة الواقعة بين نهايتى الأخدود أو الجسر لسكة حديد طولها معلوم الا أنه اذا أريد زيادة مقدار العرض لأسباب خصوصية كما فى تفريغ خطوط السكك الحديد وغير ذلك وهذا الخط يسمى عرض القاعدة اذ هو عرض قاع الأخدود أو أعلى الجسر



أما الخطوط الأخرى للقطاع فهى خط سطح الأرض الطبيعى وخطا ميل الأخدود أو الجسر وليس هناك فرق هندسى بين قطاع الأخدود وقطاع الجسر اذ أن أحدهما هو مقلوب الآخر



وهناك ثلاث حالات خصوصية يجب ملاحظتها عند حساب مساحة مثل هذا القطاع وذلك تبعا لكون (١) السطح الطبيعى أفقى فى جميع عرض القطاع (٢) السطح يميل ميلا عرضيا (وفى هذه الحالة يقال ان القطاع ذو ضلع مائل) ولكن لا يقطع القاعدة (٣) الأرض لها ضلع مائل قاطع للقاعدة بحيث ان جزءا من القطاع يقع فى الحفر والجزء الآخر فى الردم أما الكميات التى تقاس فهى عرض القاعدة وسيرمز اليه بالرمز (٢ ا) والجانبان المائلان وحين ما تكون الأرض غير أفقية فى العرض يقاس أيضا الضلع المائل للأرض ثم المسافة الرأسية هـ من وسط القاعدة الى السطح الطبيعى للأرض وهذه المسافة تسمى الارتفاع المتوسط أو العمق المتوسط للقطاع



ويقدر ميل الجانبين غالبا بدلالة ظل تمام الزوايا المحصورة بين الجانبين والأفق وفى هذه الأشكال ء ے هو عرض القاعدة ، ع غ هو خط سطح الأرض الطبيعى ، ع ء ، غ ے هما الجانبان المائلان ، حـ ف هو الارتفاع المتوسط هـ

١٤٩ — مساحة القطاع العرضى حينما تكون الأرض أفقية عرضيا

القطاع فى هذه الحالة شبه منحرف

فلنفرض ٢ ا عرض القاعدة ، هـ المسافة بين القاعدة والسطح الطبيعى أى ارتفاع شبه المنحرف ولنفرض أن الزاويتين الخارجيتين للجانبين المائلين هما م ، ل فحينئذ يزيد عرض السطح عن عرض القاعدة بالمقدار هـ ظتا م + هـ ظتا ل والمقداران هـ ظتا ل ، هـ ظتا م هما عرض الميلين

فالمساحة = $\frac{1}{2}$ هـ (٤ ا + هـ ظتا م + هـ ظتا ل)

واذا كان ميلا الجانبين متساويين فالمساحة = هـ (٢ ا + هـ ظتا م)

وميل الجانبين يقدر غالبا كما تقدم بدلالة ظتا م ، ظتا ل وليس بالمقدارين م ، ل أى بميل أفقى معين للرأسى المساوى للوحدة فاذا رمزنا لهاتين الكميتين بالمقدارين س١ ، س٢ وحين تساويهما بالمقدار س فقط

فان المساحة = هـ (٢ ا + $\frac{\text{س١ + س٢}}{٢}$ هـ)

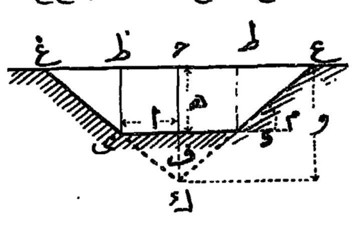
واذا كان ميلا الجانبين متساويين كما هو الحال غالبا

فان المساحة = هـ (٢ ا + س هـ)

١٥٠ — المساحة بدلالة الارتفاع المكبر ونصف عرض القطاع

(بفرض الأرض أفقية فى العرض)

اذا كان الجانبان متساويين فى الميل فانهما يتقابلان لو مدّا فى نقطة ك الواقعة على الخط حـ ف المنصف القطاع فارتفاع المثلث الأكبر ع غ ك المكوّن بهذه الطريقة يساوى



= هـ + ا ظا م = هـ + $\frac{\text{ا}}{\text{س}}$ ويسمى هذا الارتفاع بالارتفاع المكبر أو العمق المكبر للقطاع وسيرمز اليه بحرف و بحيث يكون

و = هـ + $\frac{\text{ا}}{\text{س}}$

ونصف عرض القطاع حـ ع = ا + هـ ظتا م = ا + س . هـ .
فاذا رمزنا له بحرف د يكون

$$د = ا + س\ هـ = س\ و$$

ومساحة المثلث ع غ ك = د و التى يمكن كتابتها $س\ و^{٢}$ أو $\frac{د^{٢}}{س}$

ومساحة المثلث الزائد ى ے ك = ا $\left(\frac{ا}{س}\right) = \frac{ا^{٢}}{س}$

ومنهما تكون مساحة القطاع $= س\ و^{٢} - \frac{ا^{٢}}{س}$

$$= \frac{د^{٢} - ا^{٢}}{س}$$

وباستبدال مقادير و ، د بما يساويها بدلالة هـ ، ا ، س المتقدّمة واجراء عمليــة الاختصار نجد أن هذه المقــادير تتفق بل ويجب أن تتفق فى المساحة مع مقادير البند السابق أى أن

مساحة القطاع = هـ (٢ ا + س هـ)

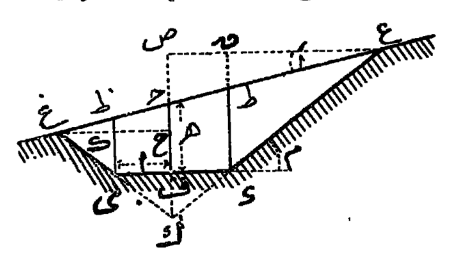
فالقوانين بدلالة و ، د سهلة الحساب خصوصا اذا كان لدى الحساب جدول مربعات الأعداد مثل جداول بارلو

١٥١ — والغالب أن يكون ميــل جانبى الأخدود أو الجسر لسـكة حديدية واحدا ويختلف الميل تبعـا لطبيعة الأرض من ١ فى الأفقى : ١ فى الرأسى أى ٤٥° الى ٥ فى الأفقى : ١ فى الرأسى أى نحو ١١° أما عرض قاعدة الأخدود أو أعلى الجسر فواحد فى جميع طوله وعمق الأخدود أو ارتفاع الجسر هو الكمية التى تختلف من قطـاع الى آخر ويترتب على اختـلافها اختــلاف مساحة القطاع فاذا قيست هــذه الكمية فيمكن الحصول على مساحة القطاع بواسطة أحد القوانين المتقدّمة حينما يكون أعلى القطاع أفقيا أو كما يقــال حينما يكون جميع سطح الأرض أفقيــا عرضيا أما عرض

الأخدود أو الجسر عند سطح الأرض فهو ٢ (ا + س هـ) اذا كانت س واحدة فى كلا جانبى القطاع ، (ا + س$_1$ هـ) + (ا + س$_2$ هـ) اذا كانت س فى أحد جانبى القطاع غيرها فى الجانب الآخر وتسمى كل من هاتين الكميتين ا + س$_1$ هـ ، ا + س$_2$ هـ نصف العرض ولو لم تكونا متساويتين وتقاسان من خط رأسى يمر من منتصف القاعدة يسمى الخط المتوسط للقطاع والخط الذى يمر من منتصف قاعدة كل قطاع سواء كان قريبا من الأفق كثيرا أو قليلا يسمى الخط المتوسط للأخدود أو الجسر وأنصاف العرض المتقدم ذكرها تبين المقدار اللازم من عرض الأرض فى كل من جهتى هذا الخط المتوسط للأخدود أو الجسر وقد ذكرت فيما تقدم فى البندين ٣٧ ، ٣٨ طرق حساب كمية الأرض اللازمة لخط طوله معلوم مع معلومية العروض أيضا فى نقط مختلفة متساوية التباعد عن بعضها على طول الخط

١٥٢ — القوانين الخاصة بالحالة التى فيها الضلع المائل للأرض غير قاطع لقاعدة

القوانين المتقدمة فى بندى ١٤٩ و ١٥٠ لايجاد مساحة ونصفى عرض القطاعات خاصة بالحالة التى تكون الأرض فيها أفقية عرضيا



ومن اللازم إيجاد قوانين للحالة التى تكون الأرض فيها مائلة أى حينما لا يكون الخط السطحى لها أفقيا

فلنفرض أن اَ هى زاوية ميل الأرض الطبيعية وأن ظتا اَ = ر

(أولا) لنفرض الحالة التى يكون ميل الجانبين فيها واحدا وظل تمام ذلك الميل س ونفرض فى الشكل أن ع غ هو خط سطح الأرض ، ى ے القاعدة ، ف حـ الخط المتوسط

ولنفرض أيضا أن ى ے = ٢ ا بحيث أن كلا من ے ف ، ف ى = ا
ولنفرض أن ف حـ = هـ ولنرمز الى الارتفاع المكبر ك حـ بحرف و
بحيث تكون و = هـ + $\frac{ا}{س}$

ونصفا عرض القطاع هما ع ص و غ ح ويرمز اليهما بحرفى د ، دَ
أما عرض الميل من الجانبين فهو ع ن ، غ ك ويحصل عليهما بطرح ا من مقادير د ، دَ

(١) فا عرض القطاع د ، دَ

أسهل طريقة لتعيين مقدارهما هى بتقدير الارتفاع المكبر (و) بدلالة د ثم بدلالة دَ فيكون و = ص ك — ص حـ = $\frac{د}{س}$ — $\frac{د}{ر}$.

ومنها د = $\frac{ر س}{ر - س}$ و = $\frac{ر}{ر - س}$ (ا + س هـ)

وبمثل ذلك اذا أخذنا و = ح ك + حـ ح = $\frac{دَ}{س}$ + $\frac{دَ}{ر}$ نحصل على

دَ = $\frac{ر}{ر + س}$ (ا + س هـ)

ومجموع العرض د + دَ = $\frac{٢ ر^٢}{ر^٢ - س^٢}$ ا + س هـ)

وحاصل ضرب نصفى العرض مهم فيما يتعلق بمساحة القطاع ويوصل اليه القانون $د دَ = \frac{ر^٢}{ر^٢ - س^٢} (١ + س هـ)^٢$

ونصف العرض على ارتفاع هـ من القاعدة هو كمية مهمة يمكن للتسهيل الرمز اليها بحرف ب لتقابل ا الذى هو نصف العرض عند القاعدة ويمكن الحصول عليها بالمعادلة $ب = ١ + س هـ$ وهى مكافئة لكمية د حينما تكون الأرض أفقية عرضيا

(٢) مساحة القطاع

مساحة المثلث ع غ ك $= \frac{١}{٢} و (د + دَ) = \frac{ر^٢ س^٢}{ر^٢ - س^٢} و^٢$

اطرح من هذه المساحة الموجودة تحت القاعدة ى ے التى تساوى $\frac{١^٢}{س}$

فتكون مساحة القطاع $= \frac{ر^٢ س}{ر^٢ - س^٢} (هـ + \frac{١}{س})^٢ - \frac{١^٢}{س}$

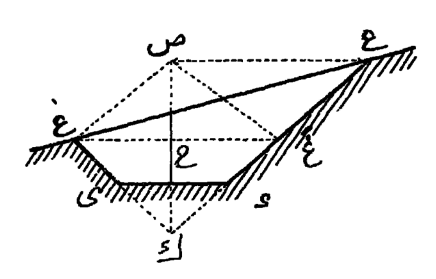
فاذا كان نصفا العرض معلومين أمكن الاستفادة من قانون $\frac{١}{٢} و (د + دَ) - \frac{١^٢}{س}$ ولكن أبسط قانون لتعيين المساحة بدلالة نصفى عرض القطاع وميل الجانبين هو

$$\text{المساحة} = \frac{د دَ - ١^٢}{س}$$

وهذا القانون ينتج مباشرة من مقدار د دَ المتقدم الذكر

ومن المفيد أيضا اثبات هذا القانون بالطريقة الآتية من غير الاستعانة بما تقدم

فمد الخط غ ح ليقابل الخط ع ك فى النقطة غَ ووصل غ ص ، غَ ص فيكون المثلث غ ع غَ مساويا فى المساحة للمثلث ع ص غَ اذ أن قاعدتهما واحدة ومحصوران بين نفس الخطين المتوازيين



وعلى ذلك يكون المثلث ع غ ك مساويا فى المساحة للشكل الرباعى غ ك غَ ص الذى على شكل طيارة ومساحته = غ ح . ص ك

ولكن ع ح = دَ ، ص ك = $\frac{ص ع}{س} = \frac{د}{س}$

وعلى ذلك تكون مساحة المثلث ع ع ك = $\frac{د دَ}{س}$

اطرح من هذا المقدار $\frac{٢}{س}$ أى مساحة المثلث الزائد ى ء ك فتتحصل على مساحة القطاع ع غ ى ء وهى $\frac{د دَ - ٢}{س}$

(٣) شبه المنحرف المكافئ

من المفيد أحيانا معرفة مقدار عمق أى قطاع خطه السطحى أفقى اذا كانت مساحة هذا القطاع مساوية لمساحة القطاع المعلوم

فمن الممكن الحصول على أبسط مقدار للعمق المكبر لهذا القطاع أى المسافة بين ك والخط السطحى للأرض

وهذا العمق يسمى بالعمق المكبر للقطاع المكافئ الأفقى السطح ونرمز اليه بحرف وَ

وحينئذ تكون المساحة طبقا لبند ١٥٠ $= س \cdot وَ^{٢} - \frac{أ^{٢}}{س}$

ومنها $وَ^{٢} = \frac{ر^{٢}}{ر^{٢} - س^{٢}} و^{٢}$

وعلى ذلك فالجذر التربيعى لهذا المقدار هو مقدار العمق المكبر المطلوب وَ

ومن السهل أن نرى أن وَ هى الوسط المتناسب الهندسى بين ك ص ، ك ح

وذلك لأن $ك ص = \frac{د}{س} = \frac{ر}{ر - س} و$

$ك ح = \frac{دَ}{س} = \frac{ر}{ر + س} و$

ومنها $ك ص \cdot ك ح = وَ^{٢}$

ويجب ملاحظة أن و التى هى العمق المتوسط المكبر للقطاع الأصلى هى الوسط المتناسب التوافقى بين ك ص ، ك ح

ومن الموافق أن نسمى القطاع المكافئ ذا السطح الأفقى بشبه المنحرف المكافئ أى شبه المنحرف المتحد فى المساحة مع القطاع المعلوم والمتحد معه أيضا فى القاعدة وفى ميل الجانبين وارتفاعه $= وَ - \frac{أ}{س}$

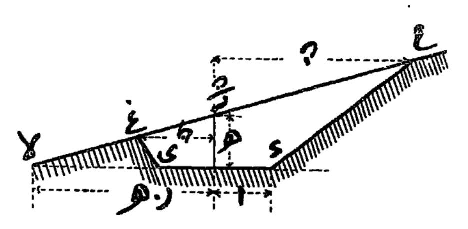
ويمكن رسم ذلك الشكل هندسيا بالطريقة المذكورة فى بند ١١٥ التى يجب الاشارة اليها هنا

فنصف عرضه $د_{١}$ هو الوسط المتناسب الهندسى بين د ، دَ وذلك لأن المساحة المكبرة $= د_{١} وَ = د_{١}^{٢} \div س$ وأيضا $= د دَ \div س$

ومنها $د_{١}^{٢} = د د$

(ثانيا) اذا كان القطاع المعلوم ذا ميلين مختلفين ظل تمامهما $س_١$ ، $س_٢$ على التنـاظر فالخطان ع ى ، غ ے لا يتقابلان حينئذ فى الخط المتوسط واذا فمن الضرورى قسمة القطاع بكيفية أخرى

وهناك طريقة سهلة لتعيين المساحة وهى مد الخط السطحى ع غ حتى



يقابل القـاعدة فى النقطة لا وأخذ الفرق بين مساحة المثلثين لا ع ى ، لا ع ے فأنصاف العرض د ، دَ للقطاع هى المطلوب تعيينها وتعين بالقانونين الآتيين

$$د = \frac{ر}{ر - س_١}\left(ا + س_١ ه\right)$$

$$دَ = \frac{ر}{ر + س_٢}\left(ا + س_٢ ه\right)$$

وذلك تبعا لما تقدم فى أول هذا البند تحت (أولا) (١)

فالقاعدة لا ى للثلث لا ع ى = ر ه + ا وارتفاعه = ه + $\frac{د}{ر}$ =

$$ه + \frac{ا + س_١ ه}{ر - س_١} = \frac{ر ه + ا}{ر - س_١}$$

وعلى ذلك فالمساحة $= \frac{(ر ه + ا)^٢}{٢(ر - س_١)}$

والقاعدة لا ے للثلث لا ع ے = ر ه − ا

وارتفاعه $= \text{هـ} - \frac{\text{ح}}{\text{م}} = \frac{\text{ا} + \text{س}_٢\,\text{هـ}}{\text{م} + \text{س}_٢} = \frac{\text{م}\,\text{هـ} - \text{ا}}{\text{م} + \text{س}_٢}$

وعلى ذلك فالمساحة $= \frac{(\text{م}\,\text{هـ} - \text{ا})^٢}{٢\,(\text{م} + \text{س}_٢)}$

واذن فمساحة القطاع المطلوبة $= \frac{(\text{م}\,\text{هـ} + \text{ا})^٢}{٢\,(\text{م} - \text{س}_١)} - \frac{(\text{م}\,\text{هـ} - \text{ا})^٢}{٢\,(\text{م} + \text{س}_٢)}$

ويجب امتحان هذا القانون بوضع $\text{س}_١ = \text{س}_٢ = \text{س}$ وتحويله الى الصورة الآتية

$$\frac{\text{م}^٢\,\text{س}}{\text{م}^٢ - \text{س}^٢}\left(\text{هـ} + \frac{\text{ا}}{\text{س}}\right)^٢ - \frac{\text{ا}^٢}{\text{س}}$$

١٥٣ — القوانين الخاصة بالحالة التى فيها الضلع المائل للأرض قاطع للقاعدة

وقد بقيت هناك حالة أخرى وهى التى فيها يقطع خط ميل الأرض القاعدة بحيث ان جزءا من القطاع يقع فى الحفر والجزء الآخر فى الردم

لنفرض أن لا هى النقطة التى يتقابل فيها الخط السطحى مع القاعدة ولنفرض أن هذه النقطة على يسار الخط المتوسط كما فى الشكل .

فيكون $\qquad \text{لاف} = \text{م}\,.\,\text{هـ}$

فجزآ القطاع يتركبان من مثلثين متشابهين قاعدتهما على التناظر

$$\text{ا} + \text{م}\,\text{هـ} \;،\; \text{ا} - \text{م}\,\text{هـ}$$

وارتفاع المثلث الأيمن $= \frac{ا + م هـ}{م - س}$

وعليه فمساحة هذا المثلث $= \frac{(ا + م هـ)^٢}{٢ (م - س)}$

و بمثل ذلك تكون مساحة المثلث الأيسر $= \frac{(ا - م هـ)^٢}{٢ (م - س)}$

لأن النسبة بين مساحة المثلثين المتشابهين كالنسبة بين مربعي الضلعين المتناظرين ا + م هـ ، ا − م هـ .

ونصفا عرض القطاع هما

$$د = \frac{م}{م - س} (ا + س هـ)$$

$$دَ = \frac{م}{م - س} (ا - س هـ)$$

وعلى ذلك يكون العرض كله $= \frac{٢ م}{م - س} ا$.

وليلاحظ أن هذا المقدار غير متعلق بالمقدار هـ .

١٥٤ — خلاصة القوانين الخاصة بقطاع الحفر والردم

(١) الأرض أفقية عرضيا

نصف عرض القطاع $د = ا + س هـ$

عرض الميل $= س هـ$

الارتفاع أو العمق المكبر $و = هـ + \frac{ا}{س} = \frac{د}{س}$

مساحة القطاع $= هـ (٢ ا + س هـ)$

» » $= س و^٢ - \frac{ا^٢}{س}$

» » $= \frac{د^٢ - ا^٢}{س}$

(٢) الأرض مائلة ولكن خط الميل لا يقطع القاعدة

نصفا عرض القطاع

$$\text{د} = \frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{س}} (١ + \text{س هـ}) \text{ ، } \text{دَ} = \frac{\text{ر}}{\text{ر} + \text{س}} (١ + \text{س هـ})$$

$$\text{د} + \text{دَ} = \frac{٢\text{ر}^٢}{\text{ر}^٢ - \text{س}^٢} (١ + \text{س هـ})$$

$$\text{د دَ} = \frac{\text{ر}^٢}{\text{ر}^٢ - \text{س}^٢} (١ + \text{س هـ})^٢$$

ونصف العرض عند الارتفاع هـ عن القاعدة $\text{ب} = ١ + \text{س هـ}$

ونصف عرض شبه المنحرف المكافئ $\text{د}_١ = \sqrt{\text{د دَ}}$

وعرض ميل الجانبين $\text{د} - ١$ ، $\text{دَ} - ١$

$$\text{د} - ١ = \frac{\text{س}}{\text{ر} - \text{س}} (\text{ر هـ} - ١)$$

$$\text{دَ} - ١ = \frac{\text{س}}{\text{ر} + \text{س}} (\text{ر هـ} - ١)$$

والعمق المكبر $\text{و} = \text{هـ} + \frac{١}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}}$

والعمق المكبر لشبه المنحرف المكافئ $\text{وَ} = \frac{\text{و ر}}{\sqrt{\text{ر}^٢ - \text{س}^٢}}$

ومساحة القطاع $= \frac{١}{٢} (\text{د} + \text{دَ})\, \text{و} - \frac{١^٢}{\text{س}}$

» » $= \frac{\text{د دَ} - ١^٢}{\text{س}}$

» » $= \text{س وَ}^٢ - \frac{١^٢}{\text{س}}$

» » $= \frac{\text{ر}^٢ \text{س و}^٢}{\text{ر}^٢ - \text{س}^٢} - \frac{١^٢}{\text{س}}$

» » $= \frac{(١ + \text{ر هـ})^٢}{٢(\text{ر} - \text{س})} - \frac{(١ - \text{ر هـ})^٢}{٢(\text{ر} + \text{س})}$

(٣) الأرض مائلة وخط الميل قاطع للقاعدة

نصفا عرض القطاع

$$\text{د} = \frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{س}}\left(\text{ا} + \text{س}\,\text{هـ}\right) \text{ ، } \text{دَ} = \frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{س}}\left(\text{ا} - \text{س}\,\text{هـ}\right)$$

$$\text{د} + \text{دَ} = \frac{٢\,\text{ر}\,\text{ا}}{\text{ر} - \text{س}}$$

وعرض ميل الجانبين

$$\text{د} - \text{ا} = \frac{\text{س}}{\text{ر} - \text{س}}\left(\text{ا} + \text{ر}\,\text{هـ}\right)$$

$$\text{، دَ} - \text{ا} = \frac{\text{س}}{\text{ر} - \text{س}}\left(\text{ا} - \text{ر}\,\text{هـ}\right)$$

ومساحة المثلث الأكبر $= \frac{\left(\text{ا} + \text{ر}\,\text{هـ}\right)^{٢}}{٢\left(\text{ر} - \text{س}\right)}$

» » الأصغر $= \frac{\left(\text{ا} - \text{ر}\,\text{هـ}\right)^{٢}}{٢\left(\text{ر} - \text{س}\right)}$

تمرينات (٢٤)

(١) ترعة أرض قاعها ٤٠ مترا وعمقها ١٠ أمتار وميل جانبها ٤٥° ($\text{س} = ١$)

والمطلوب تعيين مساحة القطاع العرضى للترعة

(٢) من الارتباطات $\text{و} = \frac{\text{د}}{\text{س}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}} = \frac{\text{دَ}}{\text{س}} + \frac{\text{دَ}}{\text{ر}}$ أثبت أن

$$(١)\quad \text{و}\left(\text{د} + \text{دَ}\right) = \frac{٢\,\text{د}\,\text{دَ}}{\text{س}}$$

$$(٢)\quad \frac{\text{د} + \text{دَ}}{\text{ر}} = \frac{\text{د} - \text{دَ}}{\text{س}}$$

(ملحوظة — المقدار الأول من المقدارين المذكورين مهم من حيث القوانين الخاصة بتعيين المساحة والثانى يمكن استعماله كطريقة مفيدة للتحقق من الضبط الحسابى حين حساب مقدار د ، دَ)

المطلوب ايجاد نصفى عرض ومساحات القطاعات فى المسائل الآتية التى فى كل منها ا = ١٠ أمتار

(٣) السطح أفقى فى جميع العرض أى ر = ∞ ، س = ١ ، هـ = ١٥ مترا

(٤) ر = ∞ ، س = ١,٥ ، هـ = ١٢,٧ مترا

(٥) ر = ٤٠ ، س = ٢ ، هـ = ١٠ أمتار

(٦) ر = ٢٣ ، س = ١ ، هـ = ١٢ مترا

(٧) ر = ١٢,٥ ، س = ١,٥ ، هـ = ١١,٣ مترا

(٨) ر = ١٠ ، س = ٢ ، هـ = ٨ أمتار

(٩) ر = ١٠ ، س = ٢ ، هـ = ٤ أمتار

(١٠) ر = ١٠ ، س = ٢ ، هـ = ١ متر

القطاعات فى المسائل الآتيــة جزء منها واقع فى الحفر والآخر فى الردم فاذا كانت هـ موجبــة يكون الجزء الأكبر من القطاع واقعــا فى الحفر أما اذا كانت هـ سالبــة فان الجزء الأكبر يكون واقعا فى الردم والمطلوب ايجاد مساحة الأجزاء التى فى الحفر وكذا التى فى الردم فى المسائل الآتية :

(١١) ر = ٤ ، س = ١,٥ ، هـ = ٢ متر

(١٢) ر = ٣,٥ ، س = ١,٥ ، هـ = ١,٥ متر

(١٣) ر = ٣ ، س = ١,٥ ، هـ = ٠

(١٤) ر = ٣ ، س = ١,٥ ، هـ = ٠,٥ متر

(١٥) ر = ٣ ، س = ١,٥ ، هـ = ٢,٥ متر

(١٦) اذا كان جزء من القطاع واقعا فى الحفر والآخر فى الردم فالمطلوب اثبات أن الفرق بين مساحة الجزئين مساو لمساحة مستطيل قاعدته العرض الكلى للقطاع وارتفاعه هو الارتفاع المتوسط له

(١٧) المطلوب اثبات أنه اذا كانت س صغيرة بالنسبة الى ر يكون مقدار

$$\sqrt{\frac{\text{ر}^2}{\text{ر}^2 - \text{س}^2}} \;\text{قريبا جدا من}\; 1 + \frac{2\,\text{س}^2}{4\,\text{ر}^2 - 3\,\text{س}^2}$$

(١٨) المطلوب ايجاد مقدار وَ (العمق المكبر لشبه المنحرف المكافئ) ومقدار وَ $- \frac{\text{ا}}{\text{س}}$ فى المسائل (٥) الى (١٠) وذلك مع الاستعانة بالنتيجة السابقـــة

(١٩) اذا كانت $\text{و}_1 = \text{هـ}_1 + \frac{\text{ا}}{\text{س}}$ ، $\text{و}_2 = \text{هـ}_2 + \frac{\text{ا}}{\text{س}}$ فالمطلوب اثبات أن

$$\frac{\text{س}}{3}\left(\text{و}_1^2 + \text{و}_1\text{و}_2 + \text{و}_2^2\right) - \frac{\text{ا}^2}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{3}\left(\text{هـ}_1^2 + \text{هـ}_1\text{هـ}_2 + \text{هـ}_2^2\right) + \text{ا}\left(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2\right)$$

(٢٠) المطلوب بيان أنه فى الأرض المـائلة حينما يكون ميـل الجانبين مختلفا (س_1 ، س_2) يمكن كتابة المساحة باحدى هاتين الصورتين

$$(1)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\text{د}^2 - \text{ا}^2}{\text{س}_1} + \frac{\text{دَ}^2 - \text{ا}^2}{\text{س}_2} - \frac{\text{د}^2 - \text{دَ}^2}{\text{ر}}\right)$$

$$(2)\quad \frac{\text{د}\,\text{دَ} - \text{ا}^2}{2}\left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right) + \frac{1}{2}\,\text{ا}\left(\text{د} - \text{دَ}\right)\left(\frac{1}{\text{س}_1} - \frac{2}{\text{س}_2}\right)$$

(٢١) المطلوب بيان أنه فى الحـالة المذكورة فى المسألة ٢٠ يكون جزآ المساحة الواقعان على جانبى الخط المتوسط هما على التناظر

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{د}^2 - \text{ا}^2}{\text{س}_1} - \frac{\text{د}^2}{\text{ر}}\right) ، \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\text{دَ}^2 - \text{ا}^2}{\text{س}_2} + \frac{\text{دَ}^2}{\text{ر}}\right)$$

(٢٢) فى الحالة نفسها المطلوب اثبات أن

$$\frac{\text{د} + \text{دَ}}{\text{ر}} = \frac{\text{د} - \text{ا}}{\text{س}_1} - \frac{\text{دَ} - \text{ا}}{\text{س}_2}$$

ثانيا — حجم الحفر والردم

١٥٥ — اذا أخذت القطاعات على أبعاد متساوية أمكن تعيين الجسم بواسطة أحد القوانين التقريبية المذكورة فى آخر الفصل الثانى من هذا الكتاب ولكن فى أحوال كثيرة نظرا لتغير ميل الأرض وما ينتج عن ذلك من تغير التدرج فى السكك يحصل على ضبط أشد بأخذ مقاس القطاعات عند بداية ونهاية كل جزء يكون قريبا من الشكل المنشورى قربا كافيا

أما هذه الأجزاء فتختلف بالطبع كثيرا فى طولها وحينئذ اذا قدرنا قطاعا واقعا فى وسط القطاعين المتطرفين فاننا نحصل على حجم كل جزء منشورى بالقانون المستنبط من القانون الأساسى للأشكال المنشورية

$$هـ \cdot \frac{س_ب + ٤ س_١ + س_٢}{٦}$$

والغرض من هذه القوانين الخاصة هو أن يتيسر حساب الجسم المنشورى من المقاسات المأخوذة فى القطاعين المتطرفين بدون حساب مساحة القطاعات المتطرفة والتى فى الوسط فعلا

أما الكميات الثابتة فى الحفر أو الردم فهى عادة عرض القاعدة ٢ أ وظل التمام سـ لميل الجانبين أما الكميات التى تختلف باختلاف القطاعات فهى الارتفاع المتوسط أو العمق المتوسط هـ وظل التمام ر لميل الأرض

١٥٦ — ايجاد حجم جزء منشورى طوله صـ مع معلومية أن الأرض أفقية عرضيا ارتفاع القطاعين المتطرفين $هـ_١$ ، $هـ_٢$

(١) مساحة القطاع المتطرف الأول $= ٢ أ هـ_١ + سـ هـ_١^٢$

مساحة القطاع المتطرف الثانى $= ٢ أ هـ_٢ + سـ هـ_٢^٢$

مساحة القطاع الواقع فى وسط الطول

$$= ٢ أ \frac{هـ_١ + هـ_٢}{٢} + سـ \left(\frac{هـ_١ + هـ_٢}{٢}\right)^٢ .$$

ومن ذلك يكون الحجم =

$$ص \left\{ ١ (هـ_١ + هـ_٢) + س \cdot \frac{(هـ_١^٢ + هـ_٢^٢ + هـ_١ هـ_٢)}{٣} \right\} \cdot\cdot (هـ)$$

وهذا يمكن كتابته بهذه الصورة

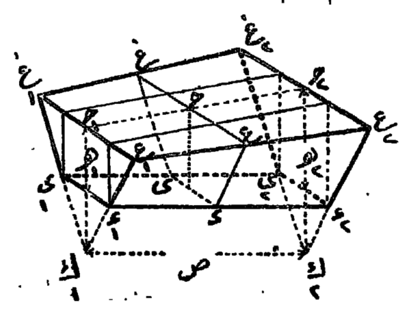
$$ص \left\{ ١ (هـ_١ + هـ_٢) + س \cdot \frac{(هـ_١ + هـ_٢)^٢ - هـ_١ هـ_٢}{٣} \right\}$$

والصور الأخيرة أوفق قليلا بالنسبة للحساب العددى . وهناك صورة أخرى تصلح للحساب بالاستعانة بالورق المقسم الى مربعات وهى :

$$ص \left[١ (هـ_١ + هـ_٢) + س \left\{ \left(\frac{هـ_١ + هـ_٢}{٢} \right)^٢ + \frac{١}{٣} \left(\frac{هـ_١ - هـ_٢}{٢} \right)^٢ \right\} \right]$$

وفى هذه القوانين يكون القدر ص . ١ (هـ$_١$ + هـ$_٢$) هو حجم الجزء المتوسط الذى عرضه ٢ ١ المحصور بين مستويين رأسيين والقدر المضروب فى الكمية س هو حجم الجزئين الواقعين على جانبى الجزء المتوسط واللذين هما هرمان ناقصان

وهناك صورتان أخريان لمقدار الحجم يجدر ملاحظتهما و يمكن الحصول عليهما بحساب حجم الجسم المكبر أولا وهو هرم ناقص ثم نطرح من ذلك



المقـدار حجم الجزء المنشورى الواقع تحت القاعدة المستوية $ء_١ ب_١ ب_٢ ء_٢$ في الشكل

(٢) مساحة القطاعين المتطرفين للهرم الناقص المذكور هما $س و_١^٢$ ، $س و_٢^٢$ على التناظر وفى ذلك $و_١ = هـ_١ + \frac{١}{س}$ ، $و_٢ = هـ_٢ + \frac{١}{س}$

ومساحة القطاع الواقع فى الوسط هى $س \left(\frac{و_١ + و_٢}{٢}\right)^٢$

وعلى ذلك يكون القطاع المتوسط $= \frac{س}{٦} \{ و_١^٢ + و_٢^٢ + (و_١ + و_٢)^٢ \}$

$= \frac{س}{٣} (و_١^٢ + و_٢^٢ + و_١ و_٢)$.

والقطاع العرضى للمنشور الذى يجب طرحه $= \frac{١^٢}{س}$

$$\text{وعلى ذلك يكون الحجم} = ص \{ \frac{س}{٤} (و_١^٢ + و_٢^٢ + و_١ و_٢) - \frac{١^٢}{س} \} \ldots (و)$$

وهنا ص هى طول الجسم

(٣) مساحة قطاعات الهرم الناقص يمكن تقديرها بدلالة نصفى العرض $د_١$ ، $د_٢$ وفى ذلك $د_١ = ١ + س هـ_١$ ، $د_٢ = ١ + س هـ_٢$ فمساحة القطاعين المتطرفين هى $\frac{د_١^٢}{س}$ ، $\frac{د_٢^٢}{س}$ على التناظر ومساحة القطاع الواقع فى وسط الطول $= \frac{١}{س} \cdot \left(\frac{د_١ + د_٢}{٢}\right)^٢$

وعلى ذلك القطاع المتوسط $= \frac{١}{٦ س} \{ د_١^٢ + د_٢^٢ + (د_١ + د_٢)^٢ \}$

$= \frac{١}{٣ س} (د_١^٢ + د_٢^٢ + د_١ د_٢)$

وبطرح $\frac{١^٢}{س}$ وهى قطاع المنشور الزائد من هـذه الكمية وضرب النـاتج فى المقدار ص وهو طول الجسم نحصل على القانون الآتى :

$$\text{الحجم} = \frac{ص}{س} \left(\frac{د_١^٢ + د_٢^٢ + د_١ د_٢}{٣} - ١^٢ \right) \ldots\ldots (د)$$

ومن الموافق تسمية هذه القوانين الثلاثة التى تعطى الحجم حينما تكون الأرض أفقية عرضيا بقانون (هـ) وقانون (و) وقانون (د) للحجم وأكثر هذه القوانين استعمالا فى العمل هو قانون (هـ) ولكن على الطالب خصوصا وهو يشتغل بالمسائل العديدة أن لا يقتصر فى حسابه على هذا القانون بل يستعمل أيضا أحد القانونين الآخرين وذلك للتحقق من ضبط النتيجة أما القانونان الآخران فربما كان أفضلهما القانون (د) لأنه أخصر قليلا من القانون (و) ويلاحظ أن جميع هذه القوانين هى فى الحقيقة قوانين لتعيين مقدار القطاع العرضى المتوسط اذ أن ذلك هو الجزء الوحيد المتعب فى العملية اذ يكفى لتعيين الحجم فى كل حالة ضرب القطاع العرضى المتوسط فى المقدار ص

وفى جميع المسائل التى ذكرت كان طول القطاع ص مقدار بمائة متر اذ لم تظهر ضرورة لادخال أى تغيير فى هذا المقاس

وفى حالة حساب الحجم بالقانون (د) يمكن بالطبع وضع الكمية

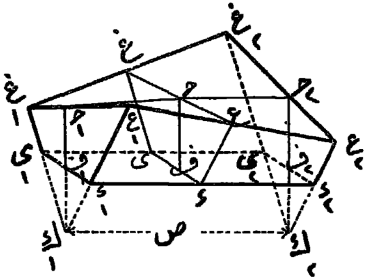
$$\frac{\text{د}_1^2 + \text{د}_2^2 + \text{د}_1\text{د}_2}{3}$$ بالصورة $$\frac{(\text{د}_1+\text{د}_2)^2 - \text{د}_1\text{د}_2}{3}$$ أو بالصورة

$$\left(\frac{\text{د}_1+\text{د}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{د}_1-\text{د}_2}{2}\right)^2$$ وذلك للتسهيل فى عملية الحساب العادى كما ذكر تماما فى حالة استعمال القانون (هـ) ومثل ذلك يسرى أيضا فى حالة تقدير الحجم بواسطة القانون (و)

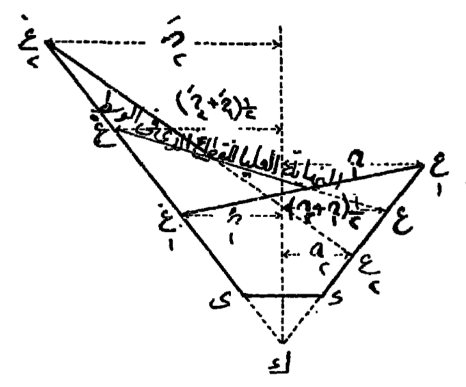
١٥٧ — ايجاد حجم جزء منشورى طوله ص والارتفاع المتوسط لقطاعيه المتطرفين هـ_1 ، هـ_2 وميل الأرض م_1 من جانب ، م_2 من الجانب الآخر ولكن خط الميل لا يقطع القاعدة

(ملحوظة) اذا كان ميل الأرض من أحد الجانبين مضادا لميلها من الجانب الآخر كما فى الشكل فيجب أن يكون أحد مقدارى م سالبا

فاذا كان الشكل فى الحقيقة منشوريا فان الضلعين ع١ع٢ ، غ١غ٢ للجانبين يكونان خطين مستقيمين والقطاعات العرضية المكبرة تكون جميعها مثلثات وعلى هذا الفرض يكون نصفا عرض القطاع الواقع فى وسط الطول هما



المتوسطين العدديين لنصفى عرض القطاعين المتطرفين كل لنظيره وذلك كما يرى مباشرة من الشكل الاتى الذى هو المنظور الخلفى لجزء الأخدود المحصور بين القطاعين المتطرفين المعلومين



فأفضل قانون يستعمل فى هذه الحالة لتعيين مساحة القطاعات هو $\frac{د د' - ا^2}{س}$ الذى يعطى المساحة بدلالة نصفى العرض

والأفضل فى استعمال هـذا القانون حساب القطاع المتوسط للجزء المكبر الذى طرفاه $ع_1 غ_1 ك_1$ ، $ع_2 غ_2 ك_2$ ثم يطرح منه مقدار المساحة الزائدة $\frac{ا^2}{س}$

ولنفرض أن $د_1$ ، $د'_1$ هما نصفا عرض أحد القطاعين المتطرفين ، $د_2$ ، $د'_2$ هما نصفا عرض القطاع المتطرف الآخر وحينئذ يكون

$\frac{1}{2}(د_1 + د_2)$ ، $\frac{1}{2}(د'_1 + د'_2)$ هما نصفا عرض القطاع الواقع فى وسط الطول

وعلى ذلك تكون مساحة القطاع المكبر المتطرف الأول $= \frac{د_1 د'_1}{س}$

ومساحة القطاع المكبر المتطرف الآخر $= \frac{د_2 د'_2}{س}$

ومساحة القطاع المكبر الواقع فى الوسط $= \frac{(د_1 + د_2)(د'_1 + د'_2)}{4 س}$

واذا تكون مساحة القطاع المتوسط

$$= \frac{د_1 د'_1 + د_2 د'_2 + (د_1 + د_2)(د'_1 + د'_2)}{6 س} - \frac{ا^2}{س}$$

وهذا يمكن كتابته بصورة أخرى وهى :

مساحة القطاع المتوسط

$$= \frac{د_1 د'_1 + د_2 د'_2 + \frac{1}{2}(د_1 د'_2 + د_2 د'_1)}{3 س} - \frac{ا^2}{س}$$

ويسمى هـذا القانون بقانون (ق ، $\text{ق}'$) ويؤول الى القانون (ق) اذا كانت الأرض أفقية عرضيا أى حينما تكون $\text{ق} = \text{ق}'$

أما مقدار د_{1} ، د_{2} فيعين بالقانون $\text{ق} = \frac{\text{م}}{\text{م} - \text{س}}\,\text{ب}$ وفى ذلك $\text{ب} = \text{س}\,\text{و} = \text{ا} + \text{س}\,\text{هـ}$ ومقدار $\text{د}'_{1}$ ، $\text{د}'_{2}$ يعين بالقانون $\text{د}' = \frac{\text{م}}{\text{م} + \text{س}}\,\text{ب}$ ويحصل على الحجم بضرب القطاع العرضى المتوسط فى المقدار ص وهاك مثالا يوضح طريقة العمل :

المفروض أن $\text{ا} = ١٠$ أمتار ، $\left\{\begin{array}{l} \text{هـ}_{1} = ٢٠ \text{ مترا ، } \text{م}_{1} = +١٠ \\ \text{هـ}_{2} = ٢٠ \text{ مترا ، } \text{م}_{2} = -١٠ \end{array}\right\}$

، $\text{س} = ١$ والمطلوب ايجاد القطاع العرضى المتوسط ثم ايجاد الحجم اذا كانت المسافة بين القطاعين المتطرفين ١٠٠ متر

$\text{ب} = \text{ا} + \text{س}\,\text{هـ}$ وعلى ذلك $\text{ب}_{1} = \text{ب}_{2} = ٣٠$ مترا

$\text{ق} = \frac{\text{م}\,\text{ب}}{\text{م} - \text{س}}$ فيكون $\text{د}_{1} = \frac{١٠٠}{٣}$ مترا

$\text{د}_{2} = \frac{٣٠٠}{١١}$ متر

$\text{د}' = \frac{\text{م}\,\text{ب}}{\text{م} + \text{س}}$ وبذلك $\text{د}'_{1} = \frac{٣٠٠}{١١}$ مترا

$\text{د}'_{2} = \frac{١٠٠}{٣}$ متر

واذن $\text{د}_{1} + \text{د}_{2} = \text{د}'_{1} + \text{د}'_{2} = \frac{٢٠٠٠}{٣٣}$ مترا

القطاع العرضى المتوسط

$$= \frac{\text{د}_{1}\text{د}'_{1} + \text{د}_{2}\text{د}'_{2} + (\text{د}_{1} + \text{د}_{2})(\text{د}'_{1} + \text{د}'_{2})}{٦\,\text{س}} - \frac{\text{ا}^{2}}{\text{س}}$$

$د_1 د'_1 = \frac{10000}{11} =$ ٩٠٩,١ متر مربع

$د_2 د'_2 =$ ٩٠٩,١ »

$(د_1 + د_2)(د'_1 + د'_2) = (\frac{2000}{33})^2 =$ ٣٦٧٣,١ مترا مربعا

= ٥٤٩١,١ ÷ ٦

= ٩١٥,٢

اطرح $أ^2$ = ١٠٠,٠

اقسم على س = ١ = ٨١٥,٢ ÷ ١

وعلى ذلك فالقطاع المتوسط = ٨١٥,٥٢ مترا مربعا

والحجم = ٨١٥١٠ مترا مكعبا

ملحوظة — كل من القطاعين المتطرفين = ٩٠٩,١ — ١٠٠ = ٨٠٩,١ مترا مربعا

والقطاع الواقع فى الوسط $= \frac{1}{4}$(٣٦٧٣,١) — ١٠٠ = ٨١٨,٣ مترا مربعا

١٥٨ — اذا لم يكن ميل الأرض عظيما جدا أى حينما تكون $ر$ كبيرة بالنسبة الى س لا يكون الخطأ فى القوانين المؤسسة على فرض أن الأرض أفقية عرضيا جسيما جدا وحينئذ يجدر بنا البحث عن مقـدار الخطأ الناتج من استعمال هذه القوانين

فللوصول الى ذلك ندخل مقادير $د_1$ ، $د_2$ ، $د'_1$ ، $د'_2$ بدلالة $و_1$ ، $و_2$ فى مقدار القطاع المتوسط المكبر أى

$$\frac{د_1 د'_1 + د_2 د'_2 + \frac{1}{2}(د_1 د'_2 + د_2 د'_1)}{3 س}$$

وحينئذ يطرح المقدار $\frac{\text{ص}}{٣}(\text{و}_١^٢ + \text{و}_٢^٢ + \text{و}_١ \text{و}_٢)$ من المقدار السابق وهى التى يجب أن تكون مقدار القطاع المتوسط المكبر فى حالة ما تكون الأرض أفقية عرضيا ومقدار الزيادة يضرب فى ص ويكون هو المقــدار الواجب اضافته للحجم الذى حصل عليه باهمال ميل الأرض لتصحيحه وهــذا موضح فى البندين الآتيين

١٥٩ — تقــدير القطــاع المتوسط فى الأرض المــائلة وذلك بدلالة ر ، س ، و ١٠

$$\text{القطاع المتوسط} = \frac{١}{٣\,\text{س}}\left\{\text{د}_١ \bar{\text{د}}_١ + \text{د}_٢ \bar{\text{د}}_٢ + \frac{١}{٢}(\text{د}_١ \bar{\text{د}}_٢ + \text{د}_٢ \bar{\text{د}}_١)\right\} - \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

وفى ذلك $\text{د} = \frac{\text{ر}\,\text{س}}{\text{ر} - \text{س}}\,\text{و}$ ، $\bar{\text{د}} = \frac{\text{ر}\,\text{س}}{\text{ر} + \text{س}}\,\text{و}$

$$\text{واذا}\quad \text{د}_١ \bar{\text{د}}_١ + \text{د}_٢ \bar{\text{د}}_٢ = \frac{\text{ر}_١^٢\,\text{س}^٢}{\text{ر}_١^٢ - \text{س}^٢}\,\text{و}_١^٢ + \frac{\text{ر}_٢^٢\,\text{س}^٢}{\text{ر}_٢^٢ - \text{س}^٢}\,\text{و}_٢^٢$$

$$، \frac{١}{٢}(\text{د}_١ \bar{\text{د}}_٢ + \text{د}_٢ \bar{\text{د}}_١)$$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^٢ \text{ر}_١ \text{ر}_٢ \text{و}_١ \text{و}_٢ \left\{\frac{١}{(\text{ر}_١ - \text{س})(\text{ر}_٢ + \text{س})} + \frac{١}{(\text{ر}_١ + \text{س})(\text{ر}_٢ - \text{س})}\right\}$$

$$= \text{س}^٢ \text{ر}_١ \text{ر}_٢ \text{و}_١ \text{و}_٢ \cdot \frac{\text{ر}_١ \text{ر}_٢ - \text{س}^٢}{(\text{ر}_١^٢ - \text{س}^٢)(\text{ر}_٢^٢ - \text{س}^٢)}$$

وعلى ذلك يكون القطاع المتوسط مساويا الى

$$\frac{\text{س}}{٣}\left\{\frac{\text{ر}_١^٢ \text{و}_١^٢}{\text{ر}_١^٢ - \text{س}^٢} + \frac{\text{ر}_٢^٢ \text{و}_٢^٢}{\text{ر}_٢^٢ - \text{س}^٢} + \frac{\text{ر}_١ \text{ر}_٢ \text{و}_١ \text{و}_٢ (\text{ر}_١ \text{ر}_٢ - \text{س}^٢)}{(\text{ر}_١^٢ - \text{س}^٢)(\text{ر}_٢^٢ - \text{س}^٢)}\right\} - \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

ويسمى هذ القانون بقانون (ر ، و)

فاذا كانت الأرض متحدة الميل فى الجانبين أى اذا كان $م_1 = م_2 = م$ فان مقدار القطاع المتوسط يؤول الى : —

$$\frac{س م^2}{م^2 - س^2} \cdot \frac{و_1^2 + و_2^2 + و_1 و_2}{3} - \frac{ا^2}{س}$$

١٦٠ — ايجاد زيادة القطاع المتوسط الحقيقى فى الأرض المائلة فى حالة حساب ميل الأرض عنه فى حالة اهمال حساب ذلك الميل .

يجب أن نطرح من المقدار المذكور للقطاع المتوسط المقدار الآتى : —

$$\frac{س}{3}\left(و_1^2 + و_2^2 + و_1 و_2\right) - \frac{ا^2}{س}$$

وحيث أن

$$\frac{م_1^2 و_1^2}{م_1^2 - س^2} - و_1^2 = \frac{س^2 و_1^2}{م_1^2 - س^2}$$

$$\frac{م_2^2 و_2^2}{م_2^2 - س^2} - و_2^2 = \frac{س^2 و_2^2}{م_2^2 - س^2}$$

وأخيرا

$$و_1 و_2 \left\{ \frac{م_1 م_2 \left(م_1 م_2 - س^2\right)}{\left(م_1^2 - س^2\right)\left(م_2^2 - س^2\right)} - 1 \right\} = س^2 و_1 و_2 \frac{م_1^2 - م_1 م_2 + م_2^2 - س^2}{\left(م_1^2 - س^2\right)\left(م_2^2 - س^2\right)}$$

وعلى ذلك فالزيادة المطلوبة تساوى

$$\frac{س^3}{3}\left\{ \frac{و_1^2}{م_1^2 - س^2} + \frac{و_2^2}{م_2^2 - س^2} + و_1 و_2 \frac{م_1^2 - م_1 م_2 + م_2^2 - س^2}{\left(م_1^2 - س^2\right)\left(م_2^2 - س^2\right)} \right\}$$

فاذا كانت النسبة $\text{س}^{٢} : \text{ر}^{٢}$ صغيرة كما هو الواقع غالبا فيمكن إهمال تلك الزيادة أو اختصارها بالصورة الآتية وذلك بعدم طرح $\text{س}^{٢}$ منها

$$\text{الزيادة} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\left\{\frac{\text{و}_{١}^{٢}}{\text{ر}_{١}^{٢}} + \frac{\text{و}_{٢}^{٢}}{\text{ر}_{٢}^{٢}} + \text{و}_{١}\text{و}_{٢}\left(\frac{١}{\text{ر}_{١}^{٢}} - \frac{١}{\text{ر}_{١}\text{ر}_{٢}} + \frac{١}{\text{ر}_{٢}^{٢}}\right)\right\}$$

وهذا المقدار هو ما يستعمل فى جميع الأحوال العادية بشرط أن يكون الشكل منشوريا حقيقة وذلك لأن ر دائما أكبر بكثير من س فى الأشياء العملية .

فاذا كانت الأرض مائلة بالتساوى أى اذا كانت $\text{ر}_{١} = \text{ر}_{٢} = \text{ر}$ فان مقدار الزيادة يؤول الى : —

$$\frac{\text{س}^{٣}}{\text{ر}^{٢} - \text{س}^{٢}} \cdot \frac{\text{و}_{١}^{٢} + \text{و}_{٢}^{٢} + \text{و}_{١}\text{و}_{٢}}{٢}$$

وهكذا يمكن اختصاره غالبا الى : —

$$\frac{\text{س}^{٣}}{\text{ر}^{٢}} \cdot \frac{\text{و}_{١}^{٢} + \text{و}_{٢}^{٢} + \text{و}_{١}\text{و}_{٢}}{٣}$$

حساب حجم الحفر فى المسئلة المذكورة فى البند ١٥٧ باهمال ميل الأرض أولا ثم باضافة التصحيح

ففى هذه الحالة $\text{ا} = ١٠$ أمتار ، $\text{ه}_{١} = \text{ه}_{٢} = ٢٠$ مترا ، $\text{س} = ١$

وعلى ذلك $\text{ا}\,(\text{ه}_{١} + \text{ه}_{٢}) + \text{س} \cdot \frac{\text{ه}_{١}^{٢} + \text{ه}_{١}\text{ه}_{٢} + \text{ه}_{٢}^{٢}}{٣} = ٢\,\text{ا}\,\text{ه} + \text{ه}^{٢} = ٨٠٠$ متر مربع

ولهذه المساحة يجب اضافة الزيادة الناشئة من ميل الأرض

وفى هـذه الحالة $\text{و}_1 = \text{و}_2 = 30$ مترا ، $\text{ر}_1 = -\text{ر}_2 = 10$

واذن تكون المساحة الزائدة $= \frac{\text{س}^3 \text{و}^2}{3} \left[\frac{2}{\text{ر}^2 - \text{س}^2} + \frac{3\text{ر}^2 - \text{س}^2}{(\text{ر}^2 - \text{س}^2)^2} \right]$

$$= \frac{\text{س}^3 \text{و}^2}{3} \cdot \frac{5\text{ر}^2 - 3\text{س}^2}{(\text{ر}^2 - \text{س}^2)^2}$$

$$= 300 \times \frac{500 - 3}{(99)^2}$$

$$= 15{,}2 \text{ مترا مربعا}$$

وعلى ذلك تكون مساحة القطاع المتوسط الحقيقية = ٨١٥,٢ مترا مربعا والحجم = ٨١٥٢٠ مترا مكعبا كما تقدم .

ملحوظة — فى هذه المسألة استعمل مقدار الزيادة كله لأن س لم تكن صغيرة جدا بالنسبة الى ر ولكن الواقع أن الفرق لايكون جسيما لو استعملنا القانون المعدل الذى يعطى

المساحة الزائدة $= \frac{\text{س}^3}{3} \left[\frac{\text{و}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{و}^2}{\text{ر}^2} + \frac{3\text{و}^2}{\text{ر}^2} \right]$

$$= \frac{5\text{س}^3 \text{و}^2}{3\text{ر}^2}$$

$$= 15 \text{ مترا مربعا}$$

وبناء على ذلك يكون الحجم ٨١٥٠٠ مترا مكعبا بدلا من ٨١٥٢٠ والفرق فى هـذه الحالة ١ على ٤٠٠٠ فقط وأقل بكثير جدا من الشك الذى يلحق بعملية حسابية مثل المتقدمة .

١٦١ — فى البحث المتقـدم فى القانون فى حالة ما يكون الميل مختلفا فرض أن شكل الحفر المحصور بين القطاعين المتطرفين منشورى حقيقة وهذا استلزم فرض أن الحدين $\text{ع}_1 \text{ع}_2$ ، $\text{غ}_1 \text{غ}_2$ للجانب المائل مستقيمان

ولكن مثل هذا الفرض قد لا يكون دائما طبق الحقيقة خصوصا فى الأحوال التى يلتوى فيها السطح كثيرا لاسيما حينما تكون $م_1$ ، $م_2$ أحدهما سالبا والآخر موجبا كما فى المثال المذكور فى بند ١٥٧ وبند ١٦٠ ففى مثل هذه الأحوال يجب قياس القطاع الواقع فى الوسط وأيضا القطاعين المتطرفين الا اذا كان الميل طفيفا جدا ومن المهم معرفة أىّ الحالات والى أىّ درجة يمكن الاعتماد على الحجم المحسوب فى حالة عدم قياس القطاع الذى فى الوسط ولهذا الغرض سنقارن بين الحجم الذى يحصل عليه بفرض أن الشكل منشورى وبين الحجم الذى يحصل بطريقتين آخريين تستعملان غالبا ومع أن هـذا الحجم هو أقل من الحجم الأول الا أن الفرق فى كثير من الأحوال طفيف جدا بحيث يهمل ومقـدار الفرق هو مقياس الخطأ المحتمل فى الحجم المحسوب ومنه يعرف هل هناك ضرورة لقياس القطاع الذى فى الوسط أم لا .

١٦٢ — الطريقة الثانية أو طريقة الأفقى المكافئ فى حالة ميل الأرض

وهنا طريقة متبعة غالبا وهى حساب الارتفاعات المكبرة $\bar{و}_1$ ، $\bar{و}_2$ للقطاعات الأفقية التى مساحتها مساوية لمساحة القطاعات المتطرفة المعلومة (أنظر البند ١٥٢ — (٣)) ثم حساب الحجم باستعمال قانون $(\bar{و})$

$$الحجم = ص \left\{ \frac{س}{٣} \left(\bar{و}_1^2 + \bar{و}_2^2 + \bar{و}_1 \bar{و}_2 \right) - \frac{أ^2}{س} \right\}$$

وهذا مماثل لفرض أن مقدار $\bar{و}$ فى القطاع الذى فى الوسط هو المتوسط الحسابى بين مقداريه فى القطاعين المتطرفين وهذا الفرض لا يكون حقيقيا مطلقا فى الجسم المنشورى الحقيقى الا اذا كان الميـل $(م)$ ثابتا والحجم الذى يعطيه قانون $(\bar{و})$ هذا أقل مما تعطيه الطريقة المنشورية اذا كانت $م_1$ ، $م_2$ مختلفتين كما سنرى ولكن فى كثير من الأحوال يكون الفرق طفيفا لا يعتدّ به

وللتمكن من عمل مقارنة بين قانونى (ر ، و) ، قانون (وَ) سنبحث كما بحثنا فى الحالة السابقة عن مقدار زيادة القطاع المتوسط الذى يعطيه القانون (وَ) عن مقدار القطاع المتوسط فيما لو كانت الأرض أفقية عرضيا ونقارن هذه الزيادة بالزيادة فى حالة استعمال قانون (ر ، و)

والارتباط بين وَ ، وهو $\text{وَ}^2 = \frac{\text{ر}^2\,\text{و}^2}{\text{ر}^2-\text{س}^2}$ وعلى ذلك يمكن كتابة مقدار القطاع المتوسط الذى يعطيه قانون وَ هكذا

$$\frac{\text{س}}{3}\left\{\frac{\text{ر}_1^2\,\text{و}_1^2}{\text{ر}_1^2-\text{س}^2}+\frac{\text{ر}_2^2\,\text{و}_2^2}{\text{ر}_2^2-\text{س}^2}+\text{و}_1\,\text{و}_2\sqrt{\frac{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2}{(\text{ر}_1^2-\text{س}^2)(\text{ر}_2^2-\text{س}^2)}}\right\}-\frac{\text{ا}^2}{\text{س}}$$

وهذا يخالف قانون (ر ، و) فى الحد الثالث فقط و يمكن اختصار المقدار الموضوع تحت الجذر بالانتفاع بالحقيقة المعلومة وهى أن س أقل من ر هكذا

$$\sqrt{\frac{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2}{(\text{ر}_1^2-\text{س}^2)(\text{ر}_2^2-\text{س}^2)}}=\sqrt{\frac{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2}{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2-\text{س}^2(\text{ر}_1^2+\text{ر}_2^2)}}\quad\text{اذا أهملنا } \text{س}^4$$

$$=\left(1-\text{س}^2\,\frac{\text{ر}_1^2+\text{ر}_2^2}{\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\text{س}^2\,\frac{\text{ر}_1^2+\text{ر}_2^2}{2\,\text{ر}_1^2\,\text{ر}_2^2}\quad\text{اذا أهملنا أيضا } \text{س}^4 \text{ والقوى الأعلى منها}$$

فاذا أدخلنا هذا الاختصار وطرحنا من القطاع المتوسط مقداره فى حالة ما اذا كانت الأرض أفقية عرضيا أى $\frac{\text{س}}{3}(\text{و}_1^2+\text{و}_2^2+\text{و}_1\,\text{و}_2)-\frac{\text{ا}^2}{\text{س}}$

نجد أن المساحة الزائدة $=\frac{\text{س}^3}{3}\left\{\frac{\text{و}_1^2}{\text{ر}_1^2}+\frac{\text{و}_2^2}{\text{ر}_2^2}+\frac{1}{2}\,\text{و}_1\,\text{و}_2\left(\frac{1}{\text{ر}_1^2}+\frac{1}{\text{ر}_2^2}\right)\right\}$

فالمقامان الأولان قد اختصرا بعدم طرح الكمية $س^٢$ منهما كما تقدم . ويتنج الحجم فى المثال العددى السابق مساويا الى ٨٠٩٠٠ متر مكعب بدلا من ٨١٥٠٠ متر مكعب

وقد كانت المساحة الزائدة على فرض أن الشكل منشورى (أنظر بند ١٦٠) كما يأتى

$$\frac{س^٣}{٣}\left\{\frac{و_١^٢}{ر_١^٢} + \frac{و_٢^٢}{ر_٢^٢} + و_١ و_٢ \left(\frac{١}{ر_١^٢} + \frac{١}{ر_٢^٢} - \frac{١}{ر_١ ر_٢}\right)\right\}$$

وهذا يزيد عن المقدار السابق بالكمية

$$\frac{س^٣ و_١ و_٢}{٦}\left(\frac{١}{ر_١} - \frac{١}{ر_٢}\right)^٢$$

ويتنج من ذلك أن الحجم المحسوب على فرض أن الشكل منشورى يزيد عن الحجم المحسوب بالقانون (وَ) بالكمية

$$\frac{س^٣ و_١ و_٢}{٦}\left(\frac{١}{ر_١} - \frac{١}{ر_٢}\right)^٢ \quad . \quad ص$$

واذا فهذه الكمية هى لحد ما مقياس الخطأ المحتمل فى الحجم المحسوب فاذا كانت صغيرة بحيث لا يكون لها أثر فان الحجم يكون واحدا تقريبا اذا حسب بأى الطريقتين وعلى الخصوص اذا لم تكن الأرض ملتوية فان الاختلاف يكون صفرا أما اذا كان الاختلاف كبيرا فان النتيجة تدل على أنه كان من الواجب قياس القطاع الذى فى وسط الطول . أما فى حالة عدم القياس فربما تكون الطريقة المثلى اعتبار التقدير الأصغر للحجم أقرب الى الحقيقة من التقدير الأكبر . وذلك لأن الطريقة الثالثة الآتى شرحها بعد

والتى يستعملها المهندسون كثيرا تعطى مقدارا أقل من الطريقتين السابقتين غالبا ولكن ليس فى جميع الأحوال .

١٦٣ — الطريقة الثالثة فى حالة ميل الأرض

هذه الطريقـة مبنية على فرض أن الميل سائر بالتـدريج من $ج_1$ الى $ج_2$ أى أن الخط السطحى المتوسط للأرض مستقيم من $ج_1$ الى $ج_2$ وبنـاء على ذلك يكون الارتفاع المتوسط للقطاع الواقع فى الوسط هو المتوسط الحسابى بين الارتفاعين المتوسـطين للقطاعين المتطرفين (وفى كل من الطريقتين السابقتين يكون الارتفاع المتوسط للقطاع الواقع فى الوسط أكبر منه فى هذه الطريقة اذ أنه أكبر ارتفاع على فرض أن الشكل منشورى) وميل الأرض ($م$) عنـد القطاع الذى فى الوسط يعتبر حينئذ المتوسط التوافقى لمقـدارى ($م$) فى القطاعين المتطرفين(*) وبذلك يحسب القطاع الذى فى الوسط ثم القطاع المتوسط بالطريقة المعتادة أى بقانون سمبسون

$$\text{مساحة القطاع المكبر} = \frac{م^2 س}{م^2 - س^2} و^2 = س و^2 \left(1 - \frac{س^2}{م^2}\right)^{-1}$$

$$= س و^2 + \frac{س^3 و^2}{م^2} \text{ مع ترك قوى } س \text{ الأعلى}$$

من المكعب . أما المساحة المكبرة فتكون $س و^2$ لو كانت الأرض أفقية عرضيا وعلى ذلك تكون المساحة الزائدة لهذا القطاع $\frac{س^3 و^2}{م^2}$

(*) وهذا يمـاثل اعتبار شكل سطح الأرض مكافئا زائديا خطاه الراسمان أحدهما مواز الى $ج_1 ج_2$ والثانى عمودى عليه ولا يعطى قانون سمبسون الا مقدارا تقريبيا فقط للحجم فى هذه الحـالة

ومن ذلك تكون المساحة الزائدة للقطاعين المتطرفين $\frac{\text{س}^3\,\text{و}_1^2}{\text{م}_1^2}$ ، $\frac{\text{س}^3\,\text{و}_2^2}{\text{م}_2^2}$ على التناظر والمساحة الزائدة للقطاع الذى فى الوسط تكون بهذه الطريقة

$$\frac{\text{س}^3}{\text{م}^2}\cdot\left(\frac{\text{و}_1+\text{و}_2}{2}\right)^2$$

وفى ذلك $\frac{2}{\text{م}} = \frac{1}{\text{م}_1} + \frac{1}{\text{م}_2}$

وعلى ذلك $\text{م} = 2\,\text{م}_1\,\text{م}_2 \div (\text{م}_1 + \text{م}_2)$

وبقانون سمبسون يكون

$$\text{متوسط المساحة الزائدة} = \frac{\text{س}^3}{6}\left\{\frac{\text{و}_1^2}{\text{م}_1^2} + \frac{\text{و}_2^2}{\text{م}_2^2} + \frac{(\text{و}_1+\text{و}_2)^2}{\text{م}^2}\right\}$$

$$= \frac{\text{س}^3}{6}\left\{\frac{\text{و}_1^2}{\text{م}_1^2} + \frac{\text{و}_2^2}{\text{م}_2^2} + \frac{(\text{م}_1+\text{م}_2)^2}{4\,\text{م}_1^2\,\text{م}_2^2}(\text{و}_1+\text{و}_2)^2\right\}$$

وفى المثال العددى المذكور $\text{و}_1 = \text{و}_2 = 30$ مترا ، $\text{م}_1 = -\text{م}_2 = 10$ وعلى ذلك تؤول المساحة الزائدة الى $\frac{\text{س}^3\,\text{و}^2}{3\,\text{م}^2} = 3$ أمتار مربعة والحجم الى ٨٠٣٠٠ متر مكعب بدلا من ٨١٥٠٠ متر مكعب الناتج من الطريقة المنشورية وبدلا من ٨٠٩٠٠ متر مكعب الناتج من طريقة الأفق المكافئ أما الفرق بين أكبر هاتيك الكميات وأصغرها فأقل من $\frac{1}{2}$ ١ فى المائة والفرق بين المتوسط والمقدارين المتطرفين $\frac{3}{4}$ فى المائة وعلى ذلك يكون مقدار الشك فى حالة قطاع ملتو كهذا كبيرا جدا فى حالة عدم معرفة ما اذا كانت الخطوط $\text{ح}_1\,\text{ح}_2$ أو $\text{ع}_1\,\text{غ}_1$ أو $\text{ع}_2\,\text{غ}_2$ مستقيمة أم لا فاذا علم ذلك فيجب علينا معرفة القانون الذى نعتمد عليه والا فيلزم أن نأخذ المقدار المتوسط أى ٨٠٩٠٠ متر مكعب ونكتفى بشك قدره $\frac{3}{4}$ فى المائة ولكن لاشك فى أن

أفضل طريقة هى قياس الارتفاع وميل القطاع الذى فى الوسط حتى يمكن حساب مساحته ومساحة القطاعين المتطرفين وأخذ المتوسط بمقتضى قانون سمبسون

وأما المتوسط المتحصل بهــذه الطريقة فهو فى الغالب لا دائمـا أقل من المتحصل باحدى الطريقتين السالفتين ولكن الاختلاف بين المقدار الناتج بهذه الطريقة وبين الناتج بالطريقتين الأخريين ليس بالبساطة التى بين الناتج بالطريقة الأولى والناتج بالطريقة الثانية أما المقدار الذى يزيد به متوسط المساحة التى تعطيها الطريقة الثانية على المتوسط الناتج من هذه الطريقة الثالثة فهو

$$\frac{س^{3}}{6}\left\{\left(\frac{و_{1}}{ر_{1}}-\frac{و_{2}}{ر_{2}}\right)^{2}-\left(\frac{و_{1}-و_{2}}{ر}\right)^{2}\right\} \text{ وفى ذلك } \frac{2}{ر}=\frac{1}{ر_{1}}+\frac{1}{ر_{2}}$$

وهذا يمكن الحصول عليه بسهولة نوعا بالطرح وبترتيب الحدود ويكون اما موجبا أو سالبا وتكون صفرا اذا كانت $ر_{1} = ر_{2}$ أى حينما يكون سطح الأرض غير ملتو وفى الحقيقة فان نتائج الطرق الثلاث تتحد عنـد عدم التواء سطح الأرض

١٦٤ — خلاصة القوانين فى حالة ميل الأرض

لنفرض أن مقادير القطاع العرضى المتوسط المتحصلة بالطرق الثلاث السابقة مرموز اليهـا بالحروف $ع_{1}$ ، $ع_{2}$ ، $ع_{3}$ على التناظر ولنفرض أن المتوسط المتحصل بترك حساب ميل الأرض مرموز اليه بحرف ع

ولنفرض أن $ع_{1} = ع + ح_{1}$

، $ع_{2} = ع + ح_{2}$

، $ع_{3} = ع + ح_{3}$

وحينئذ تكون $ع_{١} = \frac{د_{١} د_{١}' + د_{٢} د_{٢}' + \frac{١}{٢}\left(د_{١} د_{٢}' + د_{٢} د_{١}'\right)}{٣ س} - \frac{أ^{٢}}{س}$

$$= \frac{س}{٣}\left(\frac{ر_{١}^{٢} و_{١}^{٢}}{ر_{١}^{٢} - س^{٢}} + \frac{ر_{٢}^{٢} و_{٢}^{٢}}{ر_{٢}^{٢} - س^{٢}} + \frac{ر_{١} ر_{٢} و_{١} و_{٢}\left(ر_{١} ر_{٢} - س^{٢}\right)}{\left(ر_{١}^{٢} - س^{٢}\right)\left(ر_{٢}^{٢} - س^{٢}\right)}\right) - \frac{أ^{٢}}{س}$$

$$ع_{٢} = \frac{س}{٣}\left(و_{١}'^{٢} + و_{٢}'^{٢} + و_{١}' و_{٢}'\right) - \frac{أ^{٢}}{س}$$

$$ع_{٣} = \frac{س}{٦}\left(\frac{ر_{١}^{٢} و_{١}^{٢}}{ر_{١}^{٢} - س^{٢}} + \frac{ر_{٢}^{٢} و_{٢}^{٢}}{ر_{٢}^{٢} - س^{٢}} + \frac{٤ ر^{٢} و^{٢}}{ر^{٢} - س^{٢}}\right) - \frac{أ^{٢}}{س}$$

وفى ذلك $و = \frac{١}{٢}\left(و_{١} + و_{٢}\right)$ ، $ر = \frac{٢ ر_{١} ر_{٢}}{ر_{١} + ر_{٢}}$

وأيضا بمقتضى البند ١٥٦

$$ع = أ\left(هـ_{١} + هـ_{٢}\right) + \frac{١}{٣} س \left(هـ_{١}^{٢} + هـ_{٢}^{٢} + هـ_{١} هـ_{٢}\right)$$

$$= \frac{س}{٣}\left(و_{١}^{٢} + و_{٢}^{٢} + و_{١} و_{٢}\right) - \frac{أ^{٢}}{س}$$

$$= \frac{١}{س}\left(\frac{ب_{١}^{٢} + ب_{٢}^{٢} + ب_{١} ب_{٢}}{٣} - أ^{٢}\right)$$

وفى ذلك $ب = أ + س هـ$

ثم اذ تذكرنا أن ر دائما أكبر بكثير من س تكون

$$ح_{١} = \frac{١}{٣} س^{٣} \left\{\frac{و_{١}^{٢}}{ر_{١}^{٢}} + \frac{و_{٢}^{٢}}{ر_{٢}^{٢}} + و_{١} و_{٢}\left(\frac{١}{ر_{١}^{٢}} + \frac{١}{ر_{٢}^{٢}} - \frac{١}{ر_{١} ر_{٢}}\right)\right\}$$

$$ح_{٢} = \frac{١}{٣} س^{٣} \left\{\frac{و_{١}^{٢}}{ر_{١}^{٢}} + \frac{و_{٢}^{٢}}{ر_{٢}^{٢}} + \frac{١}{٢} و_{١} و_{٢}\left(\frac{١}{ر_{١}^{٢}} + \frac{١}{ر_{٢}^{٢}}\right)\right\}$$

$$ح_{٣} = \frac{١}{٦} س^{٣} \left\{\frac{و_{١}^{٢}}{ر_{١}^{٢}} + \frac{و_{٢}^{٢}}{ر_{٢}^{٢}} + \frac{٤ و^{٢}}{ر^{٢}}\right\} ،$$

وفى ذلك $\text{و} = \frac{1}{2}(\text{و}_1 + \text{و}_2)$ ، $\text{ر} = \frac{2\,\text{ر}_1\,\text{ر}_2}{\text{ر}_1 + \text{ر}_2}$

ومن هنا $\text{ح}_1 - \text{ح}_2 = \frac{1}{6}\,\text{و}_1\,\text{و}_2\,\text{س}^3\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}_2}\right)$

$$\text{ح}_2 - \text{ح}_3 = \frac{1}{6}\,\text{س}^3\left\{\left(\frac{\text{و}_1}{\text{ر}_1} - \frac{\text{و}_2}{\text{ر}_2}\right) - \left(\frac{\text{و}_1 - \text{و}_2}{\text{ر}}\right)\right\}$$ ، وفى ذلك $\text{ر} = \frac{2\,\text{ر}_1\,\text{ر}_2}{\text{ر}_1 + \text{ر}_2}$

وأخيرا حينما يكون الميل منظما فى جميع الأرض بحيث تكون $\text{ر}_1 = \text{ر}_2 = \text{ر}$

تكون $\text{ع}_1 = \text{ع}_2 = \text{ع}_3 = \frac{\text{ر}^2\,\text{س}\,(\text{و}_1^2 + \text{و}_2^2 + \text{و}_1\,\text{و}_2)}{3\,(\text{ر}^2 - \text{س}^2)} - \frac{\text{أ}^2}{\text{س}}$

$$\text{ح}_1 = \text{ح}_2 = \text{ح}_3 = \frac{\text{س}^3}{3\,\text{ر}^2}(\text{و}_1^2 + \text{و}_2^2 + \text{و}_1\,\text{و}_2)$$ ،

١٦٥ — وأفضل قانون للاستعمال فى حالة ما تكون ر مختلفة فى جميع الأرض أى حينما يكون سطح الأرض ملتويا هو القانون الثانى أى القانون الذى فيه أشد الاحتمال لاعطاء أدق نتيجة ولكن القانون الثالث هو الأكثر استعمالا بينما القانون الأول هو الأضبط على الاطلاق فى حالة ما يكون الشكل منشوريا تماما وزيادة على ذلك فانه حينما يعلم نصفا عرض القطاعين المتطرفين يكون القانون الأول هو أبسط الثلاثة فى الحساب

فاذا كانت ر أكبر بكثير من س فى جميع الطول المطلوب فان ع تكون دقيقة دقة كافية

وربما كانت أفضل طريقة فى العمل هى حساب ع من القانون

$$\text{ع} = \frac{1}{3\,\text{س}}(\text{ب}_1^2 + \text{ب}_2^2 + \text{ب}_1\,\text{ب}_2) - \frac{\text{أ}^2}{\text{س}}$$

وفى ذلك $\text{ب} = \text{س}\,\text{و} = \text{أ} + \text{س}\,\text{هـ}$ = نصف عرض القطاع عند الارتفاع هـ من القاعدة مع كتابة قانون الزيادة أيضا بدلالة ب_1 ، ب_2 بدلا من و_1 ، و_2

$$\text{مثلا } \text{ح}_{١} = \frac{\text{س}}{٣}\left\{\left(\frac{\text{ب}_{١}^{٢}}{\text{م}_{١}^{٢}} + \frac{\text{ب}_{٢}^{٢}}{\text{م}_{٢}^{٢}}\right) + \text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}\left(\frac{١}{\text{م}_{١}^{٢}} + \frac{١}{\text{م}_{٢}^{٢}} - \frac{١}{\text{م}_{١}\text{م}_{٢}}\right)\right\}$$

وحينئذ يسهل ترتيب الأرقام العددية فى صفين متوازيين فيكون مقدار ع فى صف والمقدار الزائد فى الصف الآخر ويمكن التأكد من دقة وضبط مقدار ع بواسطة قانون (ه) هكذا

$$\text{ع} = \frac{\text{س}}{٣}\left(\text{ه}_{١}^{٢} + \text{ه}_{٢}^{٢} + \text{ه}_{١}\text{ه}_{٢}\right) + \text{ا}\left(\text{ه}_{١} + \text{ه}_{٢}\right)$$

١٦٦ — ايجاد حجم جزء منشورى طوله ص والارتفاع المتوسط لقطاعيه المتطرفين $\text{ه}_{١}$ ، $\text{ه}_{٢}$ وخط ميل الأرض قاطع للقاعدة .

كل قطاع عرضى لا ع ى (أنظر بند ١٥٣) هو مثلث قاعدته $= (\text{ا} + \text{م ه})$ وارتفاعه $= \frac{\text{ا} + \text{م ه}}{\text{م} - \text{س}}$

$$\text{وعلى ذلك فمساحة أحد القطاعين المتطرفين} = \frac{(\text{ا} + \text{م}_{١}\text{ه}_{١})^{٢}}{٢(\text{م}_{١} - \text{س})}$$

$$\text{ومساحة القطاع المتطرف الآخر} = \frac{(\text{ا} + \text{م}_{٢}\text{ه}_{٢})^{٢}}{٢(\text{م}_{٢} - \text{س})}$$

فاذا فرضنا أن رؤوس القطاعين المتطرفين وصلت بعضها الى بعض بالخطوط $\text{لا}_{١}$ $\text{لا}_{٢}$ ، $\text{ع}_{١}$ $\text{ع}_{٢}$ ، $\text{ى}_{١}$ $\text{ى}_{٢}$ فان قاعدة القطاع العرضى الذى فى الوسط تكون هى المتوسط الحسابى بين قاعدتى القطاعين المتطرفين وكذا ارتفاع ذلك القطاع يكون هو المتوسط الحسابى بين ارتفاعى القطاعين المتطرفين ومن هذه الفروض يمكن حساب القطاع العرضى الذى فى الوسط وحينئذ بواسطة قانون سمبسون يمكن ايجاد القطاع المتوسط واذا ضربنا المقدار الأخير بالكمية ص نحصل على الحجم

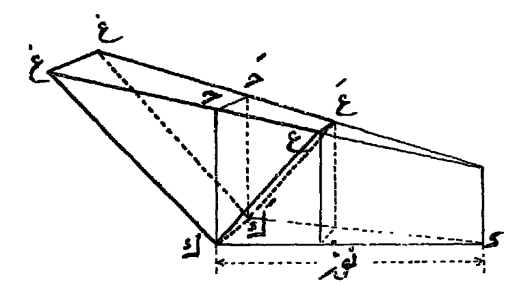
أما اذا فرضنا أن مقدار هـ فى القطاع الذى فى الوسط هو المتوسط الحسابى لمقدارى هـ فى القطاعين المتطرفين وأن مقدار ر فى القطاع الذى فى الوسط هو المتوسط التوافق لمقدارى ر فى القطاعين المتطرفين فاننا نحصل على مقدار للحجم مخالف لما تقدم الا اذا كان الميل ثابتا فى جميع الأرض

فاذا كان هناك اختلاف كبير بين مقدارى الحجم الناتجين من الطريقتين فان ذلك دليل على وجوب قياس القطاع الذى فى الوسط ففى حالة عدم قياس هذا القطاع يجب اعتبار المتوسط بين الحجمين المحسوبين أنه أقرب مقدار ممكن للحجم الحقيق

١٦٧ — ايجاد تأثير الانحناء على حجم الحفر

اذا كان الحفر منحنيا وكانت الأرض مائلة ميلا عظيما فانه يجب حساب ذلك فيكون الحجم أكبر أو أصغر مما اذا كان الحفر مستقيما مع اتحاده فى الطول تبعا لجهة الميل بالنسبة للانحناء فاذا كان الجزء الأعلى للحفر خارجا عن الانحناء فان الحجم يكون أكبر واذا كان داخله فان الحجم يكون أصغر مما اذا كان الحفر مستقيما .

فلنفرض أن ع غ ك هو القطاع المكبر للحفر فى أى نقطة



ولنفرض أن ن نصف قطر المنحنى ، د ، دَ نصفا عرض القطاع ، و (= حـ ك) الارتفاع المكبر

ولنأخذ قطاعا آخر عَ غَ كَ قريبا جدا من القطاع الأول وحينئذ يتقاطع القطاعان فى خط رأسى مار بمركز منحنى الحفر ى

ولنفرض أن ص هى البعد بين القطاعين فى النقطة ك أو فى النقطة حـ أى على طول الخط المنصف للحفر

وحينئذ يكون الجسم المحصور بين ع غ ك ، عَ غَ كَ خابورا ضيقا قطاعه العرضى = ع غ ك وأضلاعه ع عَ ، غ غَ ، ك كَ فيكون

$$\text{جحمه} = \text{ع غ ك} \times \frac{\text{ع عَ} + \text{غ غَ} + \text{ك كَ}}{\text{٣}}$$

والمفروض الآن أن ك كَ = ص ويرى من السهل أن

$$\frac{\text{ع عَ}}{\text{ك ك}} = \frac{\text{ن} - \text{د}}{\text{ن}} \text{ ، } \frac{\text{ع غَ}}{\text{ك ك}} = \frac{\text{ن} + \text{دَ}}{\text{ن}}$$

وعلى ذلك $\text{ع عَ} = \text{ص}\left(\text{١} - \frac{\text{د}}{\text{ن}}\right)$ ، $\text{غ غَ} = \text{ص}\left(\text{١} + \frac{\text{د}}{\text{ن}}\right)$

ومنه تكون $\frac{\text{ع عَ} + \text{غ غَ} + \text{ك كَ}}{\text{٣}} = \text{ص}\left(\text{١} + \frac{\text{دَ} - \text{د}}{\text{٣ ن}}\right)$

فيكون حجم القطعة $= \text{ص}\,(\text{مساحة ع غ ك})\left(\text{١} + \frac{\text{دَ} - \text{د}}{\text{٣ ن}}\right)$

فاذا اعتبرت الكمية $(\text{مساحة ع غ ك})\left(\text{١} + \frac{\text{دَ} - \text{د}}{\text{٣ ن}}\right) - \frac{\text{ا}^{\text{٢}}}{\text{س}}$

قطاعا عرضيا بدلا من مساحة ع غ ك $- \frac{\text{ا}^{\text{٢}}}{\text{س}}$ فيمكن السير فى الحساب كما لو كان الحفر مستقيما

أما الكسر $\frac{\text{دَ} - \text{د}}{\text{٣ ن}}$ الذى يصحح القطاع العرضى فيجوز بالطبع أن يكون موجبا أو سالبا ولكنه فى الشكل السابق موجب ويجوز أيضا أن

يؤول الى كسر صغير جدا بحيث يكون عديم الأهمية ويشترط لاضافة أى كمية لتصحيح القطاع العرضى أن يكون الانحناء حادا والميل عظيما

وحيث ان $\text{د} = \frac{\text{ر ب}}{\text{ر} + \text{س}}$ ، $\text{دَ} = \frac{\text{ر ب}}{\text{ر} - \text{س}}$ فينتج من ذلك أن $\text{دَ} - \text{د} = \frac{\text{٢ ر س ب}}{\text{ر}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ أو بالتقريب $\frac{\text{٢ س ب}}{\text{ر}}$ ومن هنا يكون العامل المصحح $= \frac{\text{٢ ر س ب}}{\text{٣ ى} (\text{ر}^{٢} - \text{س}^{٢})}$ أو بالتقريب $\frac{\text{٢ س . ب}}{\text{٣ ر . ى}}$

مثـال — لنفرض أن $\text{ا} = ٢٠$ مترا ، $\text{س} = ٢$ ، $\text{ى} = ٥٠٠$ ولنفرض أن الارتفاع المتوسط والميل فى كل من القطاعات الثلاثة المتساوية التباعد كما يأتى :

$$\text{هـ}_{١} = ٥ \text{ أمتار} ، \text{هـ}_{٢} = ١٠ \text{ أمتار} ، \text{هـ}_{٣} = ٧ \text{ أمتار}$$

$$\text{ر}_{١} = ١٠ ، \text{ر}_{٢} = ١٠ ، \text{ر}_{٣} = ١٠$$

وفى هذا المثال قد قيست الابعاد اللازمة فى القطاع العرضى الذى فى الوسط بحيث لم يبق علينا غير تطبيق قانون سمبسون وسنستخدم قانون (د ، دَ) لحساب كل قطاع حيث ان هذا القانون هو الأسهل والأوفق

$$\text{ب} = \text{ا} + \text{س هـ} \quad \therefore \text{ب}_{١} = ٣٠ ، \text{ب}_{٢} = ٤٠ ، \text{ب}_{٣} = ٣٤$$

$$\text{د} = \frac{\text{ر ب}}{\text{ر} - \text{س}} \quad \therefore \text{د}_{١} = \frac{٣٠٠}{٨} ، \text{د}_{٢} = \frac{٤٠٠}{٨} ، \text{د}_{٣} = \frac{٣٤٠}{٨}$$

$$\text{دَ} = \frac{\text{ر ب}}{\text{ر} + \text{س}} \quad \therefore \text{دَ}_{١} = \frac{٣٠٠}{١٢} ، \text{دَ}_{٢} = \frac{٤٠٠}{١٢} ، \text{دَ}_{٣} = \frac{٣٤٠}{١٢}$$

ومن ذلك $\text{د}_{١} - \text{دَ}_{١} = \frac{١٠٠}{٨}$ ، $\text{د}_{٢} - \text{دَ}_{٢} = \frac{١٠٠}{٦}$ ، $\text{د}_{٣} - \text{دَ}_{٣} = \frac{١٧٠}{١٢}$.

$\therefore$ تكون العوامل $\frac{١}{١٢٠}$ ، $\frac{١}{٩٠}$ ، $\frac{١٧}{١٨٠٠}$ أو بالتقريب $\frac{١}{١٠٠}$

فاذا كان الضلع الأعلى من الحفر واقعا داخل الانحناء يجب طرح التصحيح وعلى ذلك يكون العمل هكذا

د١ د١َ = ٣٠٠٠٠ / ٣٢ = ٩٣٧,٥ التصحيح = ٧,٨ ... (= ١ / ١٢٠)

٤ د٢ د٢َ = ٢٠٠٠٠ / ٣ = ٦٦٦٦,٧ التصحيح = ٧٤,١ ... (= ١ / ٩٠)

د٣ د٣َ = ١٢٠٤,٢ التصحيح = ١٢,٠ ... (= ١ / ١٠٠)

٨٨٠٨,٤ ٩٣,٩

٩٣,٩

= ٨٧١٤,٥ ÷ ٦

= ١٤٥٢,٤

اطرح أ ٤٠٠,٠

اقسم على س = ٢ ١٠٥٢,٤ ÷ ٢

القطاع المتوسط = ٥٢٦,٢ مترا مربعا

أما اذا كان الضلع الأعلى من الحفر واقعا خارج الانحناء فانه يجب اضافة التصحيح وحينئذ تعدل طريقة العمل كما يأتى :

د١ د١َ + ٤ د٢ د٢َ + د٣ د٣َ = ٨٨٠٨,٤

التصحيحات = ٩٣,٩

٨٩٠٢,٣ ÷ ٦

= ١٤٨٣,٧

اطرح أ٢ ٤٠٠,٠

اقسم على س = ٢ ١٠٨٣,٧ ÷ ٢

القطاع المتوسط = ٥٤١,٨ مترا مربعا

(تمرينات ٢٥)

المطلوب ايجاد القطاعات العرضية المتوسطة فى الأمثلة التسعة الآتية بفرض أن الأشكال منشورية تماما

ويجب التأكد من صحة النتيجة بحل كل مثال بطريقتين مختلفتين . أما عرض القاعدة فهو ٢٠ مترا فى كل مثال بحيث يكون ا = ١٠ أمتار الا اذا ذكر ما يخالف ذلك

(١) $س = ٢$ ، $م_{١} = ١٠$ ، $م_{٢} = ٢٠$ ، $هـ_{١} = ١٠$ أمتار ، $هـ_{٢} = ٥$ أمتار

(٢) $س = ١$ ، $م_{١} = ٥٠$ ، $م_{٢} = ٤٠$ ، $هـ_{١} = ٢٠$ مترا ، $هـ_{٢} = ٢$ مترين

(٣) $س = ١$ ، $هـ_{١} = ١٠$ أمتار ، $هـ_{٢} = ٦$ أمتار والأرض أفقية عرضيا

(٤) $س = ١$ ، $هـ_{١} = ٦$ » ، $هـ_{٢} = ٠$ » » »

(٥) $س = ١,٥$ ، $هـ_{١} = ١٢$ مترا ، $هـ_{٢} = ٦$ أمتار ، $م_{١} = ٢٠$ ، $م_{٢} = -١٠$

(٦) $س = ١,٥$ ، $هـ_{١} = ٦$ أمتار ، $هـ_{٢} = ٠$ ، $م_{١} = -١٠$ ، $م_{٢} = \infty$

(أنظر مسألة ١٧)

(٧) $س = ١$ ، $ا_{١} = ١٠$ أمتار ، $ا_{٢} = ١٥$ مترا ، $هـ_{١} = ١٠$ أمتار ، $هـ_{٢} = ٢$ متر والأرض أفقية عرضيا (أنظر مسألة ١٢)

(٨) $س = ٢$ ، $ا_{١} = ١٠$ أمتار ، $ا_{٢} = ١٥$ مترا ، $هـ_{١} = ٠$ ، $هـ_{٢} = ١٠$ أمتار ، $م_{١} = \infty$ ، $م_{٢} = ٥٠$

(٩) $س = ٠$ ، $ا_{١} = ١٠$ أمتار ، $ا_{٢} = ١٥$ مترا ، $هـ_{١} = ٥$ أمتار ، $هـ_{٢} = ١٢$ مترا والأرض أفقية عرضيا

(١٠) أوجد قانونا لمعرفة القطاع العرضى المتوسط لحفر جوانبه رأسية (أى $\text{س} = ٠$) ، هـ_1 ، هـ_2 هما الارتفاعان المتوسطان لقطاعيه المتطرفين ، ا_1 ، ا_2 نصفا عرض قاعدته عند القطاعين المتطرفين والأرض مائلة ميلا مّا

(١١) تأكد من ضبط نتيجة المسألة السابقة باعتبار $\text{ا}_1 = \text{ا}_2$ ، $\text{هـ}_1 = \text{هـ}_2$

(١٢) المطلوب بيان أنه اذا كان هناك جزء منشورى لحفر وقاعدته بدلا من أن تكون ذات عرض ثابت فى جميع الطول يختلف عرضها من ٢ا_1 فى أحد القطاعين المتطرفين الى ٢ا_2 فى القطاع المتطرف الآخر مع العلم بأن الأرض أفقية عرضيا فان قوانين (هـ) ، (و) ، (د) تتشكل بالصورة الآتية :

$$\text{ص}\left(\frac{\text{ا}_1\text{هـ}_1+\text{ا}_2\text{هـ}_2+(\text{ا}_1+\text{ا}_2)(\text{هـ}_1+\text{هـ}_2)}{٣}+\text{س}\,\frac{\text{هـ}_1^2+\text{هـ}_1\text{هـ}_2+\text{هـ}_2^2}{٣}\right)\qquad(\text{هـ})$$

$$\text{ص}\left(\text{س}\,\frac{\text{و}_1^2+\text{و}_1\text{و}_2+\text{و}_2^2}{٣}-\frac{\text{ا}_1^2+\text{ا}_1\text{ا}_2+\text{ا}_2^2}{٣\text{س}}\right)\quad\ldots\quad(\text{و})$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}}\left(\frac{\text{د}_1^2+\text{د}_1\text{د}_2+\text{د}_2^2}{٣}-\frac{\text{ا}_1^2+\text{ا}_1\text{ا}_2+\text{ا}_2^2}{٣}\right)\quad\ldots\quad(\text{د})$$

(١٣) المطلوب بيان أن

$$\frac{\text{ر}_1\text{ر}_2(\text{ر}_1\text{ر}_2-\text{س}^2)}{(\text{ر}_1^2-\text{س}^2)(\text{ر}_2^2-\text{س}^2)}=\frac{\text{ر}_1\text{ر}_2}{\text{ر}_1+\text{ر}_2}\left(\frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_1^2-\text{س}^2}+\frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_2^2-\text{س}^2}\right)$$

مع تحليل الكسر على حسب قوى س

(١٤) المطلوب بيان أن $(\text{ر}_1\text{ر}_2-\text{س}^2)^2=(\text{ر}_1^2-\text{س}^2)(\text{ر}_2^2-\text{س}^2)+\text{س}^2(\text{ر}_1-\text{ر}_2)^2$

(١٥) المطلوب بيان أن قانون ($ر$ ، $و$) للقطاع المتوسط لشكل منشورى تام يمكن وضعه بالصورة الآتية :

$$\frac{\text{س}}{٣}\left(\frac{\text{ر}_{١}^{٢}\,\text{و}_{١}^{٢}}{\text{ر}_{١}^{٢}-\text{س}^{٢}}+\frac{\text{ر}_{٢}^{٢}\,\text{و}_{٢}^{٢}}{\text{ر}_{٢}^{٢}-\text{س}^{٢}}-(١+\text{ى})\frac{\text{ر}_{١}\,\text{ر}_{٢}\cdot\text{و}_{١}\,\text{و}_{٢}}{\text{ر}_{١}\,\text{ر}_{٢}-\text{س}^{٢}}\right)-\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}}$$

$$\text{،}\ \text{ى}=\frac{\text{س}^{٢}(\text{ر}_{١}-\text{ر}_{٢})^{٢}}{(\text{ر}_{١}^{٢}-\text{س}^{٢})(\text{ر}_{٢}^{٢}-\text{س}^{٢})}$$

(١٦) المطلوب بيان أنه يمكن وضع قانون الزيادة الناشئة من ميل الأرض بالصورة الآتية

$$\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\left(\frac{\text{و}_{١}^{٢}}{\text{ر}_{١}^{٢}-\text{س}^{٢}}+\frac{\text{و}_{٢}^{٢}}{\text{ر}_{٢}^{٢}-\text{س}^{٢}}+(١+8)\frac{\text{و}_{١}\,\text{و}_{٢}}{\text{ر}_{١}\,\text{ر}_{٢}-\text{س}^{٢}}\right)$$

$$\text{،}\ 8=\frac{\text{ر}_{١}\,\text{ر}_{٢}(\text{ر}_{١}^{٢}-\text{ر}_{٢}^{٢})}{(\text{ر}_{١}^{٢}-\text{س}^{٢})(\text{ر}_{٢}^{٢}-\text{س}^{٢})}$$

(١٧) المطلوب ايجاد قانون القطاع المتوسط وكذا قانون الزيادة حينما تكون $\text{ر}_{٢}=\infty$

(١٨) المطلوب ايجاد قانون القطاع المتوسط وكذا قانون الزيادة حينما تكون $\text{ر}_{٢}=-\text{ر}_{١}=\pm\text{ر}$

(١٩) المطلوب ايجاد مقدار الحفر فى حالة ما يقطع خط ميل الأرض القاعدة مع العلم بأن ا = ١٠ أمتار ، س = ١ ، $\text{هـ}_{١}$ = ٢ متر ، $\text{ر}_{١}$ = ٥ ، $\text{هـ}_{٢}$ = ٠ ، $\text{ر}_{٢}$ = ١٠ وطول الحفر ١٠٠ متر

(٢٠) المطلوب ايجاد مقدار الردم فى المسألة السابقة .

(٢١) المطلوب ايجاد مقـدار الحفر والردم فى طول قدره ١٠٠ متر حينما تكون هـ = ٢ متر ، ١ متر على التناظر فى القطاعين المتطرفين ، س = ١ ، ر = ٥ فى جميع الأرض

(٢٢) المطلوب التأكد من دقة جواب مسألة (٢١) بالاستعانة بمسألة (١٦) من تمرينات (٢٤) صحيفة (٢٣٥)

الفصل الثامن

حل المثلثات بواسطة اللوغاريتمات وقواعد مختصرة في الحسابات اللوغاريتمية

---

١٦٨ — سنفرض في الحلول الآتية أن المعلوم بعض أضلاع المثلث و بعض زواياه وأن الباقي من أضلاعه وزواياه مطلوب ايجاده ونفرض أن الطالب عالم بالقوانين التي تستعمل في الحسابات والغرض من هذا الفصل بيان أحسن طريقة لتنظيم العمل المشتغل به و بيان طرق لائقة لتحقيق النتائج التي قد حصل عليها حاسب واحد فاذا اشتغل شخصان بالحساب كل على حدته فلا داعي لمثل هذا التحقيق لأنه ليس هناك طريق للتحقيق أحسن من عمل الحساب مرتين مستقلتين .ولا يقتصر سبب هذا على أن من المحقق عملا أن النتائج المتحصلة اذا كانت متفقة فهي صحيحة بل لأنه في حالة عدم توافق النتائج فان مقارنة تفاصيل العمل تظهر محل الاختلاف و بذلك يتيسر التصحيح بأقل تعب

الا أنه في حالة ما يتم العمل عامل واحد من الضروري ايجاد طريقة لتحقيق نتيجته

١٦٩ — فأول مسألة نختارها هي أن يكون المعلوم الثلاثة الأضلاع والمطلوب ايجاد الثلاث الزوايا فيرى أن هناك طرق تحقيق بسيطة يمكن عملها أثناء العملية زيادة على التحقيق النهائي الا أنه قبل الدخول في المسألة قد يكون من المفيد أن نبين هنا بعض قواعد مختصرة في أعمال اللوغاريتم على وجه عام فيفرض أن الطالب يعلم كيفية البحث عن لوغاريتم أي عدد ولوغاريتم الجيب وجيب التمام والظل الخ لزاوية وأنه يعلم أن اللوغاريتم

هو ا س بحيث أن اللوغاريتمات تتركب على حسب قوانين الأسس فمثلا اذا قلنا أن لو ٢ فى الجملة اللوغاريتمية التى أساسها عشرة (أو بالاختصار $لو_{١٠} ٢$) = ٠,٣٠١٠٣

فمعنى ذلك أن $٣ = ١٠^{٠,٣٠١٠٣}$ وذلك يدل على صحة القضايا الآتية وهى

$$٢٠ = ١٠^{١,٣٠١٠٣} ، ٢٠٠ = ١٠^{٢} \times ١٠^{٠,٣٠١٠٣} = ١٠^{٢,٣٠١٠٣}$$

$$٠,٢ ، = ١٠^{-١} \times ١٠^{٠,٣٠١٠٣} = ١٠^{٠,٣٠١٠٣-١}$$ الخ

ويدل أيضا على صحة ما يأتى وهو $٢^{د} = ١٠^{د \times ٠,٣٠١٠٣}$

فمثلا $٢^{١٠} = ١٠^{٣,٠١٠٣}$ أو يساوى بالتقريب $١٠^{٣}$ وذلك أمر سهل التحقيق لأن $٢^{١٠} = ١٠٢٤ ، ١٠^{٣} = ١٠٠٠$

١٧٠ — بيان القواعد الخاصة باللوغاريتمات بالاختصار

اللوغاريتم المعتاد لأى عدد هو أس القوة لعدد ١٠ الذى يجعله مساويا للعدد المفروض فاذا كان س هو لوغاريتم العدد د فانه يكون $د = ١٠^{س}$

فاذا ضرب عددان $د = ١٠^{س} ، م = ١٠^{ص}$ أو قسم أحدهما على الآخر فانه يكون $= د م = ١٠^{س+ص}$

$$د \div م = ١٠^{س-ص}$$

ومن هنا تنتج القواعد الآتية وهى أنه لضرب عددين يلزم أن يضم لوغاريتماها ولقسمة عدد على عدد آخر يلزم طرح لوغاريتم الثانى من لوغاريتم الأول

أى أن

$$لو د م = لو د + لو م$$

$$، لو \frac{د}{م} = لو د - لو م$$

و بمثل ذلك تنتج القواعد الأخرى الخاصة باللوغاريتمات وهى

$$\text{لو}\ د^{س} = س\ \text{لو}\ د \quad ، \quad \text{لو}\ \sqrt[س]{د} = \frac{1}{س}\ \text{لو}\ د$$

واذا نظرنا للعدد البيانى أى الجزء الصحيح من اللوغاريتم المعتاد ينبغى أن يلاحظ أنه اذا كان أعلى رقم من العدد فى رتبة الآحاد أى اذا كان العدد محصورا بين ١ ، ١٠ يكون العدد البيانى للوغاريتم صفرا حيث ان اللوغاريتم يكون محصورا بين لوغاريتم ١ ، لوغاريتم ١٠ أى بين ٠ ، ١

وبناء على ذلك وعلى ما هو معلوم من أن الضرب فى ١٠ أو القسمة على ١٠ يزيد أو ينقص اللوغاريتم بقدر واحد صحيح تنتج القاعدة العامة الآتيـة

<u>ان العدد البيانى للوغاريتم أى عدد يساوى رقميا عدد المنازل التى نقل اليها أكبر رقم معنوى للعدد من منزلة الآحاد ويكون موجبا اذا كان أكبر رقم معنوى على يسار رتبة الآحاد وسالبا اذا كان أكبر رقم معنوى على يمين رتبة الآحاد أما الجزء الاعشارى من اللوغاريتم فهو موجب دائما ومقداره غير متعلق بوضع العلامة الاعشارية فى العدد</u>

فمثلا فى العدد ٣١٢١٧,٦٥ يكون أكبر عدد هو ٣ وهو على يسار رقم الآحاد بأربع رتب واذن يكون عدده البيانى هو ٤ وهذا اللوغاريتم يساوى ٤,٤٩٤٤٠٠

وفى العدد ٠,٠٠٠٣١٢١٧٦٥ أكبر رقم معنوى هو فى رابع منزلة على يمين الآحاد واذن يكون العدد البيانى للوغاريتم هو − ٤ ويكتب هكذا $\overline{٤}$ واللوغاريتم يساوى $\overline{٤}$,٤٩٤٤٠٠ الذى هو − ٤ + ٠,٤٩٤٤٠٠

لأن العــدد يساوى ١٠^{-٤} × ٣,١٢١٧٦٥ فلوغاريتم المعامل الأول هو — ٤ ، لوغاريتم المعامل الثانى ٠,٤٩٤٤٠٠

ثم اذا نظرنا الى لوغاريتمــات الجيوب وجيوب التمام الخ للزوايا فانه ينبغى أن يلاحظ أنه حيث كان كل من الجيب وجيب التمــام أقل من ١ دائمــا فان العدد البيانى يكون سالبا على الدوام وبمثل ذلك يكون لو ظا هـ سالبا بالنسبة لمقادير هـ المحصورة بين ٠° ، ٤٥° وأن لوغاريتم ظتا هـ سالب اذا كان مقــدار هـ محصورا بين ٤٥° ، ٩٠° ولكن لوغاريتمــات القاطع وقاطع التمــام موجبة على الدوام

وفى جداول اللوغاريتمات الانكليزية جرت العادة أن يضم ١٠ على اللوغاريتم الحقيقى للجيب وجيب التمــام الخ وذلك ليستغنى عن تكرير طبع علامة ناقص أما فى أوروبا فتتبع تلك الطريقة غالبا وليس على الدوام واننا نوصى الطالب فى استعمال هذه اللوغاريتمــات أن يستعمل اللوغاريتمــات الحقيقية على الدوام لا اللوغاريتمــات الجدولية غير المضبوطة وبذلك يتخلص من شــغل باله على الدوام فى أمر ما اذا كان الواجب أن يضم أو يطرح عشرة أو جملة عشرات وفى هذه الطريقة فائدة أخرى من وجهة حسابية وهى اشتغاله بأمور حقيقية

وليس من الضرورى أن يكون أساس اللوغاريتم ١٠ على الدوام فان جميع القوانين ما عدا الخاصــة بمقادير العدد البيانى والجزء الاعشارى تكون صحيحة مهما كان الأساس والتعريف الأســاسى هو أنه اذا كان سـ^{س} = د فان مقدار س يكون هو لوغاريتم د بالنســبة للأساس حـ وهذا الارتباط يكتب عادة هكذا

$$س = لو_{حـ} د$$

وهناك نظرية أساسية لا يحتاج اليها الا فى تغيير أساس الجملة اللوغاريتمية وهى الآتية

لوغاريتم أى عدد بالنسبة لأساس معين هو نسبة لوغاريتم العدد الى لوغاريتم الأساس

أى ان $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{د} = \frac{\text{لو د}}{\text{لو ح}}$

وفى هذه المطابقة يمكن أخذ اللوغاريتمات فى الطرف الثانى بأى أساس أريد بشرط أن يكون واحدا فى البسط والمقام

ولاثبات ذلك نقول

ليكن $\text{س} = \text{لو}_{\text{ح}}\,\text{د}$

فيكون $\text{ح}^{\text{س}} = \text{د}$

فاذا أخذنا اللوغاريتم لأى أساس فانه يكون

$$\text{س لو ح} = \text{لو د}$$

ومنه $\text{س} = \frac{\text{لو د}}{\text{لو ح}}$

أى $\text{لو}_{\text{ح}}\,\text{د} = \frac{\text{لو د}}{\text{لو ح}}$

وجميع النظريات الخاصة بتغيير الأساس تنتج مباشرة من هذه النظرية الأساسية

١٧١ — قسمة اللوغاريتم ذى العدد البيانى السالب

فى أثناء العمليات الحسابية قد تدعو الضرورة لقسمة لوغاريتم ذى عدد بيانى سالب فيمكن اجراء ذلك بطريقتين والأحسن أن نوضحهما بمثال والطريقة الأولى تختار اذا كانت القسمة على عدد صحيح بسيط والطريقة الثانية تكون ضرورية اذا كان المقسوم عليه كسرا أعشاريا أو عددا مشتملا على كثير من الأرقام

مثلا ليكن المطلوب قسمة ٤̄,٣٦٥١٨٢ على ٥

الطريقة الأولى — نلاحظ أن ٤̄,٣٦٥١٨٢ = −٥ + ١,٣٦٥١٨٢
واذن فبقسمة ٥̄ على ٥ يكون خارج القسمة ١̄ والباقى + ١ ثم ان مابقى من العملية هو كالقسمة العادية ويكون الناتج هو ١̄,٢٧٣٠٣٦ .

والنقطة المهمة اللازم الالتفات اليها بوجه خاص هى أنه فى قسمة العدد البيانى يجب أن يكون خارج القسمة كبيرا كبرا كافيا لكى يكون الباقى موجبا

الطريقة الثانية — نكتب عدد ٤̄,٣٦٥١٨٢ بالصورة المكافئة له وهى
— ٣,٦٣٤٨١٨ ثم تجرى عملية القسمة المعتادة فيكون خارج القسمة
— ٠,٧٢٦٩٦٤ ثم يكتب خارج القسمة نهائيا بحيث يكون الجزء الاعشارى موجبا أى يكون ١̄,٢٧٣٠٣٦ كما تقدّم (أنظر أيضا بند ١٧٦)

وقد وضعنا هنا قليلا من الأمثلة للتمرين على اللوغاريتم قبل الدخول فى حل المثلثات

تمرينات (٢٦)

(١) المطلوب ايجاد س من المعادلة س^{٥} = ٣,١٤١٦

(٢) المطلوب ايجاد س من المعادلة س^{٥} = ٠,٠٠٣١٤١٦

(٣) المطلوب ايجاد س من المعادلة س^{٣} = ٥ ظا ٣° ١٥′ ٣٣″ جتا ١٥° ٣٠′

(٤) المطلوب ايجاد لو$_{هـ}$ ط حينما يكون ط = ٣,١٤٥١٩ ، هـ = ٢,٧١٨٢٨

(٥) المطلوب ايجاد مقدار $\frac{(\text{٠,٠٠٣٢٦})^{\frac{٣}{٧}} \times (\text{٢٧ ط})^{\frac{١}{٧}}}{(\text{١١,١٨٦٤})^{\frac{١}{٥}}}$

(٦) المطلوب ايجاد العدد الذى لوغاريتمه المعتاد هو − (٢,٦)

(٧) المطلوب ايجاد الجذر السابع للعدد ٠,٣٦٨٥٤٢ بواسطة اللوغاريتم

(٨) المطلوب ايجاد $لو_{هـ}$ ١٥٣,٤٥ (ومقدار هـ كما فى مسألة ٤)

(٩) المطلوب ايجاد $لو_{٤}$ ١١٦,٢٥٣

(١٠) المطلوب ايجاد سـ من المعادلة

$$٧١ \, سـ^{٤} = ظا \, ١٦' \, ٣٥^\circ \, حا \, ٣٠'' \, ١٨' \, ٤٢^\circ$$

(١١) المطلوب ايجاد سـ من المعادلة

$$سـ^{ط} = هـ$$ (أنظر المسألة الرابعة)

(١٢) المطلوب ايجاد سـ من المعادلة

$$\sqrt{سـ} = ظا \, ٢٠'' \, ١٥' \, ١٢٣^\circ \, جتا \, ٤٠'' \, ٤٢' \, ٩٥^\circ$$

(١٣) المطلوب ايجاد سـ من المعادلة

$$(جتا \, ا)^{سـ} = جا \, ا$$ ومقدار ا = ٢٨,٣″ ٣٧′ ٤°

(١٤) المطلوب تقدير

$$ا^{\frac{٢}{٣}} \, ب^{\frac{٥}{٦}} \, (ا + ب)^{-\frac{٧}{٣}} \, (ا - ب)^{\frac{١}{٥}}$$ حينما يكون

ا = ٣,١٤١٥٩ ، ب = ٢,٧١٨٢٨

(١٥) المطلوب تقدير الكمية فى المثال السابق حينما يكون

ا = ٠,٣١٤١٥٩ ، ب = ٠,٠٠٢٧١٨٢٨

(١٦) اذا كان لوغاريتم عدد بالنسبة للأساس ٤ هو ٠,٣٥١٨٤ فما لوغاريتم هذا العدد بالنسبة للأساس ٨

(١٧) المطلوب ايجاد المقدار $\frac{(\text{٠,٠٠٧١٤})^{\frac{٣}{٤}} \times (\frac{\text{٢٠}}{ط})^{\frac{١}{٣}}}{(\text{٣,٧١٢٤})^{\frac{١}{٤}}}$

(١٨) المطلوب ايجاد مقدار سـ اذا كان $سـ^{٢} = ٥$

(١٩) المطلوب ايجاد مقدار سـ من المعادلة $\sqrt[سـ]{(\frac{\text{٧٤٦١}}{\text{٥٢٦}})} = \text{٧,٢}$

(٢٠) المطلوب ايجاد مقدار سـ من المعادلة

$$(\frac{\text{٣٢٧}}{\text{٦٤,٨٨٥}})^{\frac{١}{سـ}} = ٢$$

(٢١) المطلوب اثبات أن $لو_{ب}\ ا \times لو_{ا}\ ب = ١$ وأن $لو_{ا}\ ا = ١$

(٢٢) المطلوب اثبات أن $لو_{ا}\ ١ = ٠$ ، $لو_{ا}\ ٠ = -\infty$ وفى الحالة الأخيرة يلزم أن يكون مقدار ا أكبر من الواحد

١٧٢ — المطلوب ايجاد زوايا المثلث اَ بَ حَ اذا علمت الأضلاع الثلاثة ا ، ب ، حـ فالقوانين التى تستعمل للحل هى

$ط\!ا\ \frac{اَ}{٢} = \frac{ى}{سـ - ا}$ الخ وفى هذا القانون

$$ى = \sqrt{(سـ - ا)(سـ - ب)(سـ - حـ) \div سـ}$$

والأحسن أن يكون ترتيب العمل حسب المثال الآتى (واللوغاريتمات ذات ستة أرقام أعشارية مأخوذة من جدول بريميكر السهل الاستعمال وفى هذه الجداول بينت الزوايا من ١٠ ثوان الى ١٠ ثوان وهذا يجعل الأجزاء النسبية بسيطة جدا

مثال ١

حساب الزوايا اذا كانت الأضلاع الثلاثة معلومة

س = ٧٦٫٩٨٢٢		لو ى = ½ ٠٫٧٧٩٣٦٤			
أ = ٧٣٫١٤٢٣	س − أ = ٣٫٨٣٩٩	لو (س − أ) = ٠٫٥٨٥٣٢٠	لوطا ½أ = ½ ٠٫١٩٥٠٤٤	½أ = ٥٧° ٢٧′ ١٤٫٦٠″	أ = ١١٤° ٥٤′ ٢٩٫١″
ب = ١٥٫٦٧٨٩	س − ب = ٦١٫٣٠٢٣	لو (س − ب) = ١٫٧٨٧٤٨٤	لوطا ½ب = ½ ٢٫٩٩١٨٨٠	½ب = ٥° ٣٦′ ١٩٫٨″	ب = ١١° ٥١′ ٣٩٫٦″
حـ = ٦٥٫١٤٣٢	س − حـ = ١١٫٨٣٩٠	لو (س − حـ) = ١٫٠٧٣٣١٥	لوطا ½حـ = ½ ١٫٧٠٦٠٤٩	½حـ = ٢٦° ٥٦′ ٢٥٫٧″	حـ = ٥٣° ٥٢′ ٥١٫٣″
٢س = ١٥٣٫٩٦٤٤	س = ٧٦٫٩٨٢٢	٣٫٤٤٥١١٩	لو س = ١٫٨٨٦٣٩٠	٩٠° ٠٠′ ٠٠٫١″	١٨٠° ٠٠′ ٠٠٫٠″
		لو س = ١٫٨٨٦٣٩٢	لو ى = ½ ٠٫٧٧٧٣٦٤		
		٢لو ى = ١٫٥٥٨٧٢٩			

وفى العمل ليس من الضرورى توضيح نوع الكميات واذن فيمكن اختصار الحساب هكذا

					الجواب
٧٦٫٩٨٢٢		½ ٠٫٧٧٩٣٦٤			
١٣٫١٤٢٣	٣٫٨٣٩٩	٠٫٥٨٤٣٢٠	½ ٠٫١٩٥٠٤٤	٥٧° ٢٧′ ١٤٫٦″	(أ) ١١٤° ٦٤′ ٢٩٫٢″
١٥٫٦٧٨٩	٦١٫٣٠٣٣	١٫٧٨٧٤٨٤	½ ٢٫٩٩١٨٨٠	٥ ٣٦ ١٩٫٨	(ب) ١١ ١٢ ٣٩٫٦
٦٥٫١٤٣٢	١١٫٨٣٩٠	١٫٠٧٣٣١٥	½ ١٫٧٠٦٠٤٩	٢٦ ٥٦ ٢٥٫٧	(حـ) ٥٣ ٥٢ ٥١٫٣
١٥٣٫٩٦٤٤	٧٦٫٩٨٢٢	٣٫٤٤٥١١٩	١٫٨٨٦٣٩٠	٩٠ ٠٠٠٠٫١	١٨٠٠٠٠٠٫٠
		١٫٨٨٦٣٩٠	½ ٠٫٧٧٩٣٦٤		
		١٫٥٥٨٧٢٩			

فتوضع مقادير الأضلاع المعلومة بعضها تحت بعض فى العمود الأول وتضم لبعضها لايجاد مقدار ٢ س ثم يوضع مقدار س فى رأس العمود لتسهيل عمليات الطرح الثلاث المحتاج اليها فى تعيين س — ا ، س — ب ، س — ح الموضوعة فى العمود الثانى وتحقق العملية بضم تلك المقادير الى بعضها ويلزم أن يكون مجموعها مساويا الى س لأن (س — ا) + (س — ب) + (س — ح) = ٣ س — ٢ س = س وهذا التحقق سهل جدا ومفيد لأنه يحقق جميع الأعمال الحسابية الى هذه النقطة التى وصل اليها الا عملية وضع مقادير ا ، ب ، ح مضبوطة وبعد ذلك يلزم ايجاد مقدار لو ى وذلك بايجاد مجموع اللوغاريتمات للكميات س — ا ، س — ب ، س — ح وطرح لو س من هذا المجموع ثم قسمة الناتج على ٢ ويعمل ذلك فى العمود الثالث ويوضع مقدار لو ى فى رأس العمود لتسهيل الطرح اللازم لايجاد لو طا ½ اَ ، لو طا ½ بَ ، لو طا ½ حَ اللازم وضعها فى العمود الرابع ويتحصل عليها بطرح لو (س — ا) ، لو (س — ب) ، لو (س — ح) على التوالى من لو ى كما يستنتج بالضرورة من القانون .

طا ½ اَ = ى ÷ (س — ا) ، طا ½ بَ = ى ÷ (س — ب) ، طا ½ حَ = ى ÷ (س — ح)

ثم أن هناك تحقيقا آخر ممكنا عمله بالقانون

ى = س طا ½ اَ طا ½ بَ طا ½ حَ

وهى معادلة يتيسر للطالب أن يحققها بنفسه وبذلك تحقق جميع الأعمال الحسابية التى أجريت الا أنه لا يحقق اللوغاريتمات بل تنحصر فائدة هذا التحقيق فى معرفة موضع الخطأ ان موجودا وذلك الخطأ يمكن معرفته من العمود التالى الذى فيه مقادير ½ اَ ، ½ بَ ، ½ حَ مستخرجة من

لوغاريتمات ظلالها فيجب أن يكون مجموع هذه الثلاثة الأنصاف للزوايا مساويا الى ٩٠° ويغتفر خطأ قدره عشر ثانية أو خمس ثانية فاذا كان الأمر كذلك فمن المحقق أن العمل جميعه صحيح بشرط أن تكون مقادير ا ، ب ، حـ قد رقمت بالضبط وليس هناك طريقة لتحقيق ذلك واذن فيلزم الاعتناء التام من أول الأمر فى وضع تلك المقادير صحيحة .

واذن فيجب النظر الى الفائدة الخاصة للتحقيق الموضحة فى العمود الرابع

فاذا فرض أن مجموع الزوايا فى العمود الخامس لايساوى ٩٠° فالمسألة اللازم النظر فيها هى أين موضع الخطأ .

فاذا تبين من فحص العمود الرابع أنه مضبوط فان هناك أمرين فقط يحتمل أن يشتملا على الخطأ أحدهما فى استخراج لوغاريتم ظل الزوايا من جدول اللوغاريتمات (بأن يأخذ الحاسب لوغاريتم الجيب حيث يريد أخذ لوغاريتم الظل وهذا خطأ كثير الوقوع من المبتدئين) والموضع الآخر الذى يحتمل أن يشتمل على الخطأ هو فى لوغاريتم س ــ ا ، س ــ ب ، س ــ حـ ، س واذا كان الأمر على خلاف ماذكر أى اذا كان فحص العمود الرابع قد أدى الى نتيجة غير مرضية فهذا يدل على أنه قد وقع خطأ فى عملية الجمع أو الطرح أو القسمة على ٢ فيجب تصحيح هذا الخطأ ثم يبحث عن لوغاريتم ظلال الزوايا بدلالة الأرقام الصحيحة .

وهناك أمران ثانويان واضحان من نفسهما أولها أنه فى نهاية عملية حساب مقدار نق يلاحظ مقدار $\frac{1}{2}$ وهذا المقدار يلزم وضعه هكذا ولا يوضع كسراً أعشاريا فى المنزلة السابعة الاعشارية لأن ذلك قد يؤدى الى الارتباك والأمر الثانى استعمال اللوغاريتم الحقيقى للظل ولذا يجب لاستخراجه من جدول اللوغاريتم اضافة ١٠ عليه عقليا .

وأكبر صعوبة يلاقيها المبتدئ هى على مايظهر ايجاد المقدار الصحيح للأجزاء النسبية فان الغالب أن لاتوجد تلك المقادير بالضبط التام ولذا تستغرق زمنا طويلا فى استخراجها مع أنه لاضرورة لذلك اذا اتبعت فى استخراجها طريقة مضبوطة .

فاذا استعمل جدول اللوغاريتم ذى الستة أرقام الاعشارية عمل بريمكر فان الأجزاء النسبية يجب أن تحسب حسابا عقليا دائما و يصير هذا سهلا جدا وسريعا بقليل من التمرين وهذه السرعة لايمكن الحصول عليها أصلا اذا حسبت جميع الأجزاء النسبية الصغيرة على الورق دائما .

ويمكن الاحتراس من الخطأ الجسيم فى الأجزاء النسبية بأن يلاحظ الطالب دائما أن اللوغاريتم المبحوث عنه يكون محصورا بين لوغاريتمين متواليين فى الجدول فاذا احترس الطالب هذا الاحتراس فانه لاينسى أن الأجزاء النسبية فى لوغاريتم جيب التمام ولوغاريتم ظل التمام سالبة على الدوام ويكون خطر وقوع الخطأ من الحاسب غير ممكن الحصول لأنه يترتب عليه أن يكون اللوغاريتم بعيدا عن الحقيقة أكثر من بعده عنها لو حذفت الأجزاء النسبية بالكلية .

ولأجل تتميم الحل اللازم للثلث المفروض يلزم أن تضعف أنصاف الزوايا ثم يعمل التصحيح الجزئى الضرورى لجعل مجموع الزوايا ١٨٠° ويوزع بالتساوى على الزوايا على قدر الامكان فاذا لم يمكن توزيعه بالتساوى فالأصوب أن يكون التصحيح فى الزوايا الكبرى لا فى الصغرى والنتيجة المصححة مبينة فى العمود السادس .

١٧٣ — المطلوب حل المثلث آَ بَ حَ المعلوم قاعدته ا وزوايا قاعدته بَ ، حَ

فالقوانين هى $\frac{ا}{حا اَ} = \frac{ب}{حا بَ} = \frac{حـ}{حا حـَ}$ = ٢ ىٯ أو يكتب بالاختصار هكذا $\frac{ك}{حا كَ}$ = ٢ ىٯ وفى هذا القانون ك رمز لأى ضلع ، كَ رمز للزاوية المقابلة له .

فتعين زاوية اَ أولا بأن يلاحظ أن مقـدارها اذا ضم على بَ + حـَ فالمجموع يساوى ١٨٠° (أنظر بند ١٧٧) ثم يعين مقدار لو ٢ ىٯ من القانون ٢ ىٯ = ا ÷ حا اَ ثم يعين ب ، حـ أخيرا من القانونين ب = ٢ ىٯ حا بَ ، حـ = ٢ ىٯ حا حـَ

وهناك أوفق ترتيب للعمل .

مثـال

الحساب حينما يعلم ضلع وزاويتان مجاورتان له .

ا = ٢٧٤,٣٦١	لو ا = ٢,٤٣٨٣٢٣	
اَ = ٥٢°, ٣٠َ, ٤٥,٢ً	لو حا اَ = ١,٨٩٣٦٢٠	
بَ = ٤٧, ١٥, ٢٢,٧	لو ٢ ىٯ = ٢,٥٤٤٧٠٣	
حـَ = ٨١, ١٣, ٥٢,١	لو حا بَ = ١,٨٦٥٩٣١	
= ١٨٠, ٠٠, ٠٠,٠	لو حا حـَ = ١,٩٩٤٨٩٤	
	لو ب = ٢,٤١٠٦٣٤	ب = ٢٥٧,٤١٥
	لو حـ = ٢,٥٣٩٥٩٧	حـ = ٣٤٦,٤١٥

أو يكتب مقدار لو ٢ ىٯ مرة ثانية اذا أريد ويكتب لو حا بَ تحت الأولى ولو حا حـَ تحت الثانية وذلك لايجاد لو ب ، لو حـ بالجمع الا أن الوضع المبين بهذا أكثر اختصارا وفيه مزية الاستغناء عن تكرار كتابة لو ٢ ىٯ

ويمكن اتباع الترتيب السابق حينما يكون المعلوم ضلعا وزاويتين أيا كانا

ولأجل التحقق من صحة النتيجة يمكن استعمال القانون حـ٢ − ب٢ = ٢ ى ا حا (حَ − بَ) أو هذا القانون العام وهو

$$\text{ص}^2 - \text{ع}^2 = ٢ \text{ ى ك حا } (\text{صَ} - \text{عَ})$$

وفى هذا القانون صَ ، ص هما أكبر الاضلاع والزوايا ، ع ، عَ هما أصغرهما ومن السهل البرهنة على صحة هذا القانون ومن الواضح أنه صحيح سواء كان كل من ص ، ع هما أكبر الأضلاع وأصغرها على التناظر أم لا ولكن هذا القانون نافع جدًا للتحقيق اذا انتخب هذان الضلعان ولأجل استعماله يجب أولا حساب مقدارى ص + ع ، ص − ع ثم يبحث عن لوغاريتميهما ويضمان الى بعضهما فينتج لو (ص٢ − ع٢) ثم يبحث عن لوغاريتم الكمية التى فى الطرف الثانى أيضا فاللوغاريتم الجديد الذى يدخل هنا هو لو حا (صَ − عَ) فاذا كان اللوغاريتمان متساويين فالعمل صحيح ما لم تكن بعض المقادير المعلومة قد وضعت غلطا أو حصل غلط فى الارتباط بين ك ، لو ك فهنا يكون

حـ + ب =	٦٠٣,٨٣٠	حَ − بَ =	٣٣° ٥٨′ ٢٩″ ٤
حـ − ب =	٨٩,٠٠٠	لو حا (حَ − بَ) =	$\bar{1}$,٧٤٧٢٧٩
لو (حـ + ب) =	٢,٧٨٠٩١٥	لو ٢ ى =	٢,٥٤٤٧٠٣
لو (حـ − ب) =	١,٩٤٩٣٩٠	لو ا =	٢,٤٣٨٣٢٣
	٤,٧٣٠٣٠٥		٤,٧٣٠٣٠٥

١٧٤ — حل المثلث اَ بَ حَ المعلوم منه ضلعان ا ، ب والزاوية اَ المقابلة لأحدهما .

فقانون الحل هو ى = ٢ نق حا ى َ كما فى الحالة السابقة تماما الا أن تفاصيل العمل فى الحل مختلفة فأول ما يعمل هو ايجاد لو ٢ نق من القانون ٢ نق = ا ÷ حا اَ ثم يعين لو حا بَ من القانون حا بَ = ب ÷ ٢ نق ومقدار لو حا بَ يعطى مقدارين للزاوية ب أولها زاوية حادة نرمز لها بالرمز بَ١ والثانية مكملتها (بَ٢) وذلك لأن جيب أى زاوية هو نفسه جيب مكملتها ولوغاريتمه كذلك أما الزاوية الثالثة حَ فهى التى تكمل مع الزاويتين الأخريين ١٨٠° فبعد ايجاد هذه الزاوية يمكن حساب الضلع الثالث من المعادلة حـ = ٢ نق حا حَ وحيث أن هناك مقدارين للزاوية بَ فيلزم أن يكون هناك مقداران للزاوية حَ (حَ١ ، حَ٢) وتبعا لذلك مقداران للضلع حـ (حـ١ ، حـ٢) أى انه يمكن أن يكون هناك مثلثان مشتملان على الأجزاء المعلومة ا ، ب ، اَ وانما يوجد هذان المثلثان اذا كان اَ + بَ٢ أصغر من ١٨٠° ولكن لايكون الأمر كذلك اذا كان اَ + بَ٢ أكبر من ١٨٠° ومن السهل مشاهدة أن الحلين انما يوجدان اذا كانت زاوية اَ حادّة والضلع ا المقابل لهذه الزاوية أصغر من الضلع ب لأن اَ + بَ٢ = اَ + ١٨٠° − بَ١ = ١٨٠ + (اَ − بَ١) وهذا المقدار أقل من ١٨٠° اذا كان اَ أصغر من بَ١ أى اذا كانت الزاوية اَ حادّة والضلع ا أقل من الضلع ب وهذه الحالة التى لها حلان تسمى بالحالة الملتبسة .

وينبغى أن يلاحظ أنه حينما يكون ا أصغر من ب (بفرض أن زاوية اَ حادّة) قد يكون المثلث مستحيلا[1] وقد يكون مثلثا قائم الزاوية فى بَ أى ان الحلين قد يكونان مستحيلين وقد يتحدان

---

(١) اذا كانت زاوية اَ قائمة أو منفرجة فان المثلث يجب أن يكون مستحيلا الا اذا كان ا أكبر من ب ولا يمكن أبدا أن يكون هناك حلان فى هذه الحالة

فان كان مقدار لوحا بَ موجبا فالمثلث مستحيل أما اذا كان مقدار لوحا بَ يساوى صفرا فالمثلث قائم الزاوية وهاتان الحالتان تميزان بمقارنة النسبة بين أ : ب بمقدار جيب الزاوية أَ

لأن حا بَ = $\frac{ب}{ق٢}$ = $\frac{ب حا أَ}{أ}$ = حا أَ ÷ $\frac{أ}{ب}$

وعليه اذا كان $\frac{أ}{ب}$ = حا أَ يكون حا بَ = ١ ، بَ = ٩٠°

واذا كان $\frac{أ}{ب}$ أقل من حا أَ يكون حا بَ أكبر من الواحد ويكون المثلث مستحيلا

ومن هنا يستنتج أخيرا (بفرض أن أَ زاوية حادة) .

اذا كان $\frac{أ}{ب}$ أكبر من الواحد أو مساويا للواحد فلا يكون هناك سوى مثلث واحد

واذا كان $\frac{أ}{ب}$ أصغر من الواحد ولكنه أكبر من حا أَ فيكون هناك مثلثان كل منها مشتمل على الأجزاء المعلومة أ ، ب ، أَ

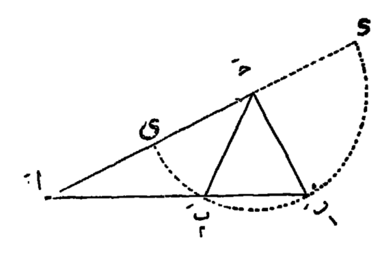
واذا كان $\frac{أ}{ب}$ = حا أَ فالمثلثان يتحدان وتكون زاوية بَ قائمة

واذا كان $\frac{أ}{ب}$ أصغر من حا أَ يكون المثلث مستحيلا

ويجب على الطالب أن يرسم جميع هذه الأحوال رسما هندسيا

وقبل الدخول فى أمثلة رقمية سنبين ارتباطا مهما بين أ ، ب وبين مقدارى الضلع الثالث $ح_١$ ، $ح_٢$ فى الحالة الملتبسة

فلنفرض أن حَ أَ بَ = أَ ، أَ حَ = ب ونرسم دائرة مركزها حَ ونصف قطرها = أ فتقطع الخط أَ بَ فى $بَ_١$ ، $بَ_٢$ وتقطع أَ حَ فى ء ، ے فيكون $ح_١$ = أَ $بَ_١$ ، $ح_٢$ = أَ $بَ_٢$



واذن يكون

$$\text{حـ}_{١\,٢} = \text{أ}\,\text{ب}_{١} \cdot \text{أ}\,\text{ب}_{٢} = \text{أ}\,\text{ى} \cdot \text{أ}\,\text{ـــ} = (\text{ب} + \text{أ})(\text{ب} - \text{أ})$$
$$= \text{ب}^{٢} - \text{أ}^{٢}$$

وسنستعمل هذا الارتباط لتحقيق العمل فى الحالة الملتبسة أما فى غير الحالة الملتبسة المذكورة فنستعمل التحقيق السابق وهو

$$\text{ص}^{٢} - \text{ع}^{٢} = ٢\,\text{س}\,\text{ك}\,\text{حا}(\text{ص} - \text{ع}')$$

مثال

حالة غير ملتبسة

ب = ٣٧١,٢٥٨		لو ب = ٢,٥٦٩٦٧٦
ا = ٥٤٢,١٢٦	لو ا = ٢,٧٣٤١٠٠	لو ٢ س = ٢,٩٥٢٠١٧
أ = ٣٧° ١٥َ ٤٢,٣ً	لوحا أ = ١,٧٨٢٠٨٣	لوحا ب = ١,٦١٧٦٥٩
	لو ٢ س = ٢٩٥١٠١٧	أ = ٣٧° ١٥َ ٤٢,٣ً
	لوحا حـ = ١,٩٤٤٩٥٣	ب = ٢٤ ٢٩ ٤٥,٢
	لو حـ = ٢,٨٩٦٩٧٠	حـ = ١١٨ ١٤ ٣٢,٥
	حـ = ٧٨٨,٨٠٦	١٨٠ ٠٠ ٠٠٠

التحقيق

حـ = ٧٨٨,٨٠٦	
ب = ٣٧١,٢٥٨	
حـ + ب = ١١,٦٠,٠٦٤	حـَ ـ بَ = ٩٣° ٤٤َ ٤٧,٣ً
حـ ـ ب = ٠٤١٧,٥٤٨	لو حا (حـَ ـ بَ) = ١,٩٩٩٠٧١
لو(حـ + ب) = ٣,٠٦٤٤٨٢	لو ٢ ى = ٢,٩٥٢٠١٧
لو(حـ ـ ب) = ٢,٦٢٠٧٠٦	لو ا = ٢,٧٣٤١٠٠
٥,٦٨٥١٨٨	٥,٦٨٥١٨٨

وفى هذا العمل ينبغى أن يلاحظ أنه يجب البدء بايجاد زاويتى بَ ، حـَ كما هو مبين فى العمود الأخير ثم يحسب مقدار حـ ويبحث عن مقدار لو حا حـَ ويوضع تحت لو ٢ ى فى العمود الثانى لأن هذين المقدارين يجب أن يضم أحدهما الى الثانى لايجاد مقدار لو حـ

وأسهل طريقة لايجاد مقدار لو حا حـَ حينما يكون حـَ أكبر من ٩٠° هى أن يطرح من حـَ عقليا ٩٠° ويبحث عن لوغاريتم جيب تمام الزاوية الباقية التى هى فى هذه الحالة ٢٨° ١٤َ ٣٢,٥ً (مع الملاحظة أثناء البحث بأن الأجزاء النسبية سالبة) وبمثل ذلك يكون لو حا (حـَ ـ بَ) المحتاج اليه فى التحقيق مساويا الى لو حا ٣° ٤٤َ ٤٧,٣ً

مثال

الحالة الملتبسة

ب = ٥٤٢٫١٢٦
ا = ٣٧١٫٢٥٨
اً = ٣٧° ١٥َ ٤٢٫٣″

ب + ا = ٩١٣٫٣٨٤
ب − ا = ١٧٠٫٨٦٨
لوغاريتمات
٢٫٩٦٠٦٥٣
٢٫٢٣٢٦٦١
٥٫١٩٣٣١٤ ← تحقق

لو ا = ٢٫٥٦٩٦٧٦
لوحا اً = ١٫٧٨٢٠٨٣
لو ٢ ى = ٢٫٧٨٧٥٩٣
لوحا حَ١ = ١٫٩٩٤١٢٣
لوحا حَ٢ = ١٫٦٢٤٠٠٣
لو ح١ = ٢٫٧٨١٧١٦
لو ح٢ = ٢٫٤١١٥٩٦
لو ح١ ح٢ = ٥٫١٩٣٣١٢

لو ب = ٣٫٧٣٤١٠٠
لو ٢ ى = ٢٫٧٨٧٥٩٣
لوحا بَ = ١٫٩٤٦٥٠٧
اً = ٣٧° ١٥َ ٤٢٫٣″
بَ١ = ٦٢ ٨ ٣٢٫٧
حَ١ = ٨٠ ٣٥ ٤٥٫٠
١٨٠ ٠٠ ٠٠٠
ح١ = ٦٠٤٫٩٤٦

اً = ٣٧° ١٥َ ٤٢٫٣″
بَ٢ = ١١٧ ٥١ ٢٧٫٣
حَ٢ = ٠٢٤ ٥٢ ٥٠٫٤
١٨٠ ٠٠ ٠٠٠
ح٢ = ٢٥٧٫٩٨٦

١٧٥ — المطلوب حل مثلث معلوم منه ضلعان ب ، حـ والزاوية المحصورة بينهما أ

ففى العمل بغير استعمال اللوغاريتم يكون القانون الذى يعين ا هو

$$ا^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢ ب حـ جتا أ$$

و بعد ذلك تعين الزوايا المجهولة بالقانون

$$ك = ٢ نق حا كَ$$

ولكن اذا أريد العمل بواسطة اللوغاريتم فالقوانين هى قوانين خاصة مستنبطة من القانون ك = ٢ نق حا كَ كما يأتى

$$\frac{ب - حـ}{ب + حـ} = \frac{حا بَ - حا حـَ}{حا بَ + حا حـَ} = \frac{٢ جتا \frac{١}{٢}(بَ + حـَ) جا \frac{١}{٢}(بَ - حـَ)}{٢ حا \frac{١}{٢}(بَ + حـَ) جتا \frac{١}{٢}(بَ - حـَ)}$$

$$= \frac{طا \frac{١}{٢}(بَ - حـَ)}{طا \frac{١}{٢}(بَ + حـَ)}$$

$$، \frac{ا}{ب + حـ} = \frac{حا أَ}{حا بَ + حا حـَ} = \frac{٢ جا \frac{١}{٢} أَ جتا \frac{١}{٢} أَ}{٢ جا \frac{١}{٢}(بَ + حـَ) جتا \frac{١}{٢}(بَ - حـَ)}$$

$$= \frac{حا \frac{١}{٢} أَ}{جتا \frac{١}{٢}(بَ - حـَ)}$$

ومنه $طا \frac{١}{٢}(بَ - حـَ) = \frac{ب - حـ}{ب + حـ} طتا \frac{١}{٢} أَ$ . . . . (١)

، $ا = (ب + حـ) حا \frac{١}{٢} أ' قا (بَ - حـَ)$ . . . . (٢)

وهذان القانونان ومعهما القانون $\frac{١}{٢} أَ + \frac{١}{٢} بَ + \frac{١}{٢} حـَ = ٩٠°$

هى قوانين العمل ما

مثال

الحساب حينما يعلم ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

ب = ٧٢٩٣,٢٨	ب − حـ = ٣٧٦٤,٨٥	لو (ب − حـ) = ٣,٥٧٥٧٤٨	لو (ب + حـ) = ٤,٠٣٤٢٩٦
حـ = ٣٥٢٨,٤٣	ب + حـ = ١٠٨٢١,٧١	لو (ب + حـ) = ٤,٠٣٤٢٩٦	لو حا $\frac{1}{2}$ أ = ١̅,٦٥٩٢٠٦
أ = ٥٤° ١٧′ ٢٨,٤″	$\frac{1}{2}$ أ = ٢٧° ٨′ ٤٤,٢″	١̅,٥٤١٤٥٢	لو قا $\frac{1}{2}$(ب′ − حـ′) = ٠,٨٢٢٢٣
ب′ = ٩٧ ٠٠ ٤٣,٦	$\frac{1}{2}$(ب′ + حـ′) = ٦٢٥١ ١٥,٨	لو ظتا $\frac{1}{2}$ أ = ٠,٢٩٠١١١	+١٢
حـ′ = ٢٨ ٤١ ٤٨,٠	$\frac{1}{2}$(ب′ − حـ′) = ٣٤ ٩ ٢٧,٨	لو طا $\frac{1}{2}$(ب′ − حـ′) = ١̅,٨٣١٥٦٣	لو أ = ٣,٧٧٥٧٣٧
١٨٠,٠٠٠,٠٠٠			وإذن يكون أ = ٥٩٦٦,٧٤

وهناك طريقة أكثر اختصارا فى العمل وهي «بعد كتابة لو (ب + حـ) فى العمود الرابع وملاحظة ما يأتى فى العمود الثالث وهو أن − لو (ب + حـ) = − ٤,٠٣٤٢٩٦ = ٥̅,٩٦٥٧٠٤ (أنظر أيضا بند ١٧٦)»

المعالم: ب = ٧٢٩٣,٢٨	٣٧٦٤,٨٥	٣,٥٧٥٧٤٨	٤,٠٣٤٢٩٦
حـ = ٣٥٢٨,٤٣	١٠٨٢١,٧١	٥̅,٩٦٥٧٠٤	١̅,٦٥٩٢٠٦
أ = ٥٤° ١٧′ ٢٨,٤″	٢٧° ٨′ ٤٤,٢″	٠,٢٩٠١١١	٠,٠٨٢٢٢٣
الجواب: ب′ = ٩٧° ٠′ ٤٣,٦″	٦٢° ٥١′ ١٥,٨″	١̅,٨٣١٥٦٣	+١٢
حـ′ = ٢٨° ٤١′ ٤٨,٠″	٣٤° ٩′ ٢٧,٨″		٣,٧٧٥٧٣٧
١٨٠ ٠٠,٠٠٠			
أ = ٥٩٦٦,٧٤			

ولأجل الاسراع فى هذا العمل يلزم أن يشتغل بالعمود الثالث والرابع معا فعنداستخراج لو ظتا ½ اَ الذى يوضع فى العمود الثالث يلزم أيضا ايجاد لو حا ½ اَ اللازم وضعه فى العمود الرابع حيث يكون كتاب جدول اللوغاريتم مفتوحا فى المحل المطلوب وعند البحث ½ (بَ — حَ) من لوغاريتم الظل ووضع الناتج تحت ½ (بَ + حَ) فى العمود الثانى يلزم أن نبحث أيضا عن مقدار لو قا ½ (بَ — حَ) لأجل العمود الرابع

ويتحصل على مقدار بَ باضافة ½ (بَ — حَ) الى ½ (بَ + حَ) ويتحصل على حَ بطرح ½ (بَ — حَ) من ½ (بَ + حَ) فاذا وضعت مقدارى بَ ، حَ تحت اَ فيمكن تحقيق العمل تحقيقا جزئيا بجمع الزوايا الثلاث الى بعضها وهذا انما هو امتحان جزئى جدا فيحقق صحة تنصيف الزاوية اَ وصحة تكوين ½ (بَ + حَ) وصحة الجمع والطرح لمقادير ½ (بَ + حَ) ، ½ (بَ — حَ) ليس الا ويمكن للطالب أن يتحقق من أن هذا هو الواقع بأن يضع أى مقدار يريده عوضا عن ½ (بَ — حَ) بدلا من المقدار الصحيح فالزوايا الثلاث اَ ، بَ ، حَ يبقى مجموعها مساويا الى ١٨٠°

ويمكن التحقيق التام بايجاد مقادير لو (ا ÷ حا اَ) ثم مقدار لو (ب ÷ حا بَ) أو مقدار لو (ح ÷ حا حَ) التى كل منهما يساوى لو ٢ نق

فيكون

لو ا	= ٣,٧٧٥٧٣٧	لو ب	= ٣,٨٦٢٩٢٣
لو حا اَ	= ١̅,٩٠٩٥٥٣	لو حا بَ	= ١̅,٩٩٦٧٤٠
	٣,٨٦٦١٨٤		٣,٨٦٦١٨٣

فاذا حصل وكانت نتيجة التحقيق غير مرضية فالخطأ يمكن أن يكون (١) فى عملية التحقيق نفسها (٢) فى مقدار $\frac{1}{2}$ (بَ — حَ) أو (٣) فى مقدار لو ا (بفرض صحة مقدارى بَ ، حَ) فاذا لم تكن الزوايا صحيحة فمن المحال أن يكون لو ا صحيحا لأنه يتوقف على الحصول على مقدار $\frac{1}{2}$ (بَ — حَ) بالضبط ولأجل البحث فيما اذا كانت الزوايا صحيحة يبحث عن لو حـ — لو حا حَ وهو المقدار الذى يجب أن يكون مساويا الى لو ب — لو حا بَ (ويساوى فى هذه الحالة ٣٫٨٦٦١٨٣) فاذا اتفقت هذه الكميات فالزوايا مضبوطة ويكون الخطأ فى العمود الرابع فقط واذا لم يتفق شئ من هذه القيم الثلاث لمقدار لو ٢ نق فالزاويتان بَ ، حَ غير صحيحتين وكذلك لو ا فأول ما يبحث عنه فى هذه الحالة هى مقادير ب — حـ ، ب + حـ وهناك طريقة جيدة للتحقيق وهى أن يجمع مقداراهما ويقسم الناتج على ٢ فيلزم أن يكون الناتج مساويا الى ب وهذا موضع كثيرا ما يدخل فيه الغلط بحيث يحسن على الدوام أن يبدأ بهذا التحقيق فاذا لم يكن الخطأ فى هذا الموضع فهناك خطأ فى اللوغاريتم أو فى العمود الثالث وينتج من ذلك أيضا خطأ فى العمود الرابع طبعا وفى هذه الحالة يكون الأصوب أن يشتغل عاملان فى الحساب مستقلين ثم تقابل الحسابات التى عملها أحدهما على التى عملها الآخر .

وهناك مسألة صغيرة تستحق الالتفات وهى الطريقة التى يجب أن يحسب بها مقدار $\frac{1}{2}$ (بَ + حَ) من مقدار $\frac{1}{2}$ اَ فمن المعلوم أن $\frac{1}{2}$ (بَ + حَ) ، $\frac{1}{2}$ اَ مجموعهما معا = ٩٠° الا أنه لأجل ايجاد الزاوية المطلوبة يلزم أن نلاحظ دائما أن مقدار ٩٠° مكوّن من ٨٩° ٥٩َ ٥٩ً ومن عشرة أجزاء عشرية من الثانية واذن فيمكن أن يكتب مقدار $\frac{1}{2}$ (بَ + حَ) مباشرة بالابتداء من الدرج وهذا أمر واضح لو نظرنا الى الزوايا

فالزوايا هى فى المثال السابق	٢,٤٤″	٨′	٢٧°
«	١٥,٨″	٥١	٦٢
ومجموع ذلك هو	(١٠),٥٩″	٥٩′	٨٩°

١٧٦ — المتمم اللوغاريتمى

وهناك أمر آخر ينبغى الالتفات اليه فى المثال المذكور فى البند السابق اذا لم يوجد لوغاريتم القاطع فى جدول اللوغاريتم وهو البحث عن أحسن طريقة للحصول عليه من لو جتا أو من ١٠ + لو حتا (وهى المرموز لها بالرمز ل جتا) وتلك هى الكمية المبينة بالجداول

لان $\quad$ قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$

وينتج من ذلك أن $\quad$ لو قا هـ = — لو جتا هـ

= ١٠ — ل جتا هـ

وحينئذ فلو طرحنا ل جتا هـ من ١٠ فاننا نجد لو قا هـ ولأجل الحصول على ذلك بالسهولة نتذكر أن عشرة = (١٠) ٩,٩٩٩٠٠٠٠ أى جملة أرقام كلها تسعات ماعدا الرقم الأخير فانه عشرة فاذا لاحظنا ذلك فان مقدار لو قا هـ يمكن أن يكتب مباشرة بالابتداء من اليسار

فاذا كان $\quad$ ل جتا هـ = ٩,٩١٧٧٧٧

يكون $\quad$ لو قا هـ = ٠,٠٨٢٢٢٣

فمجموع كل رقمين متناظرين هو تسعة ماعدا الرقمين الأخيرين من جهة اليمين فان مجموعهما ١٠ وينبغى الالتفات الى الحالة التى فيها الرقم الأخير أو الأرقام الأخيرة تساوى صفرا

فاذا كان لو جتا هـ = ٩,٧٦٨٣٢٠

فانه يكون لو قا هـ = ٠,٢٣١٦٨٠

ففى هـذه الحالة يكون الرقمان الأخيران صفرين ويكون الرقمان التاليان لهما هما اللذان مجموعهما ١٠

وينبغى أن يلاحظ أن ل جتا هـ ولو قا هـ يساوى مجموعهما ١٠ ولكن اللوغاريتم الحقيقى أى لو جتا هـ ، لو قا هـ مجموعهما يساوى صفرا ومثل هذين اللوغاريتمين يقال ان كلا منهما متمم للآخر أى أن لو قا هـ هو متمم لو جتا هـ ، لو جتا هـ هو متمم لو قا هـ أو يقال اختصارا أن الارتباط يبين هكذا

لو قا هـ = متمم لو جتا هـ

لو جتا هـ = متمم لو قا هـ

وهذه العبارة ترادف قولنا لو قا هـ = — لو جتا هـ وبالعكس الا أن هناك فرقا وهو أن كتابة المتمم اللوغاريتمى بدلا من — لو تدل على أن الكسر الاعشارى من اللوغاريتم موجب

فعلى ذلك اذا كان لو جتا هـ = ١̅,٩١٧٧٧٧

فان — لو جتا هـ = ١ — ٠,٩١٧٧٧٧

، متمم لو جتا هـ = ٠,٠٨٢٢٢٣

وهناك أمثلة أخرى للتمم اللوغاريتمى وهى لو ظا هـ ولو ظتا هـ وأيضا لو حا هـ ولو قتا هـ فان كل زوج هو حالة خصوصية من لو ا ولو $\frac{1}{ا}$ اللذين هما على الدوام متمان لبعضهما

وكل من لو حا هـ ، لو جتا هـ سالب دائما وأما متماهما أى لو قتا هـ ، لو قا هـ فهما موجبان على الدوام

تمرينات (٢٧)

المطلوب حساب الأضلاع والزوايا المجهولة فى المثلثات المشتملة على المعالم الآتى بيانها مع تحقيق النتيجة فى كل حالة وإذا كان هناك مثلثان يحلان المسألة فالمطلوب حسابهما معا

وإذا كانت المسألة مستحيلة الحل فالمطلوب بيان السبب مع العناية التامة بترتيب العمل وضبطه

(١) ا = ٣٤٧,٦٥ ، بَ = ٢٧″ ١٥′ ٢٧° ، حـَ = ٢٣″ ٤٨′ ٧٣°

(٢) ا = ١٥,٢٧٥ ، اَ = ٣٢″ ٢٥′ ٧٣° ، بَ = ٤٢″ ١٧′ ٤٨°

(٣) ا = ٣٥,٣٧٦ ، ب = ٤٧,٥٤٨ ، اَ = ٢٠″ ١٧′ ٣٢°

(٤) ا = ٥٤٦,٣٦٢ ، ب = ٥٤,٦٣٦ ، اَ = ٢٦″ ٣٦′ ٥٤°

(٥) ا = ٢٧,٥٤٨ ، ب = ٣٢١,٦٢٤ ، اَ = ١٤″ ١٧′ ٤٦°

(٦) ا = ١٢٣,٧٧٤ ، ب = ٢٠٦,٢٩٠ ، اَ = ١١,٤″ ٥٢′ ٣٦°

(٧) ا = ٢٠٦,٢٩٠ ، ب = ١٦٥,٠٣٢ ، اَ = ٤٨,٦″ ٧′ ٥٣°

(٨) ا = ٣٧٥٦٨ ، ب = ٤٦٢٢١ ، حـ = ٤٨٩٢٥

(٩) ا = ٢٩٥٤٢,٣ ، ب = ١٧٦٥٤,٨ ، حـ = ١٢٧٦٥,٧

(١٠) ا = ٢٠١,٢٩٥ ، ب = ١٢٠,٧٧٧ ، حـ = ١٦١,٠٣٦

(١١) ا = ٧٦,٢٥٤ ، ب = ٩٣,٥٨٧ ، حـ = ١٧′ ٥٩°

(١٢) ب = ٣١٤٢,٥٦ ، حـ = ٢٨٩٥,٦٣ ، اَ = ٢٨″ ١٥′ ٣٢°

(١٣) ب = ٥,١٢٣٤ ، حـ = ٦,٧٨٩٠ ، اَ = ٤٠″ ٢٩′ ١٣٧°

(١٤) ا = ٣,٧٥٤ ، ب = ٥,٢٨٣ ، حـَ = ٣٠″ ١٥′ ٢°

(١٥) ا = ٣٦٥٤ ، ب = ٥٦٢٠ ، حـَ = ١٢٤٣

وعلى الطالب أن يضع أسئلة من نفسه مشتملة على معالم مختلفة مع تحقيق النتائج على الدوام والعناية فى دراسة المعالم التى توصل الى نتائج مستحيلة

الفصل التاسع

ملحوظات حسابية

١٧٧ — الطرح

أحسن طريقة لعملية الطرح فى أحوال كثيرة هى الطريقة المعروفة باسم طريقة المتمم أو طريقة التجارة

والأفضل أن نوضحها بمثال فنقول

المطلوب طرح ½ ٣ بنسات و ٥ شلنات من ١٠ شلنات فبدلا من الطرح بالطريقة المعتادة وهى طريقة السلف والنقل نتحصل بالتدريج على المقدار الذى يلزم ضمه الى ½ ٣ بنسات و ٥ شلنات ليبلغ ١٠ شلنات فنضم ½ بنس ليكون المطروح ٤ بنسات و ٥ شلنات ثم يضم ٨ بنسات ليكون ٦ شلنات ثم يضم ٤ شلنات واذن يكون الفرق المطلوب هو ½ ٨ بنسات و ٤ شلنات

ثم اذا أريد طرح ٦٧٨٩ من ١٣٦٩٢ فتحول المسألة عقليا الى ما يأتى « ما هو المقدار اللازم ضمه الى ٦٧٨٩ ليكون الناتج ١٣٦٩٢ » فتوضع الأرقام حسب العادة الا أن اجراء العمل العقلى يختلف بالكلية

١٣٦٩٢
٦٧٨٩
———
٦٩٠٣

فالعملية العقلية بالتفصيل هى كما يأتى

أولا ٩ وثلاثة يساوى ١٢ فيكون رقم ٣ هو الرقم الأيمن من باقى الطرح وعندنا ١ فى الخانة العليا من ١٢ ينقل الى ٨ ويكون المجموع عقليا ٩ وبعد ذلك نقول ٩ + صفر = ٩ فيكون رقم صفر هو الرقم الثانى من باقى الطرح

و يكون ٧ + تسعة = ١٦ فنضع رقم ٩ وننقل رقم واحد عقليا فيتغير ٦ الى ٧ وتكون العملية الأخيرة حينئذ ٧ + ستة = ١٣ فيكون رقم ٦ هو آخر رقم مطلوب

فاذا امتحنا النتيجة بعد ذلك بجمع الصفين الأخيرين الى بعضهما فاننا نكون فى الحقيقة مجرين العمل العقلى مرة ثانية الا أن الارقام تكون فى هذه الحالة منظورة

وهـذه الطريقة ليست عظيمة الأهمية فى الطرح البسيط مثل ما سبق توضيحه الا أنها مفيدة جدا فى حالة لزوم طرح كميتين أو أكثر من كمية واحدة

ومن أحسن طرق تطبيق هـذه العملية حينما يعلم زاويتان من مثلث مستو و يطلب معرفة الزاوية الثالثة فبدلا من أن نضم الزاويتين ونطرح مجموعها من ١٨٠° لايكون عندنا سوى عملية واحدة يجب اجراؤها فعلى هذا اذا علم

ا = ٢٢,٣″ ١٤′ ٦٧°

ب = ٤٣,٨″ ٣٧′ ٤٢°

فنكتب من أول الأمر حـ = ٥٣,٩ ٧ ٧٠

و يكون المجموع ٠٠٠ ٠٠ ١٨٠°

ثم اذا أريد طرح مجموع ٦٣٢٥ ، ٨٩٢ من ٧١٨٣٢ نكتب

٧١٨٣٢

٦٣٢٥

٨٩٢

الجواب ٦٤٦١٥

والعمليات التى عملت هى

٢ (٥ ، =) ٧ ، خمسة = ١٢ (ينقل ١)
١ (٩ ، =) ١٠ (٢ ، =) ١٢ وواحد = ١٣ (ينقل ١)
١ (٨ ، =) ٩ (٣ ، =) ١٢ ، ستة = ١٨ (ينقل ١)
١ (٦ ، =) ٧ ، أربعة = ١١ (ينقل ١)
١ ، ستة = ٧

أو بالاختصار مع اجراء عملية الجمع بسرعة

٢ ، ٧ وخمسة = ١٢
١ ، ١٠ ، ١٢ وواحد = ٣
١ ، ٩ ، ١٢ وستة = ١٨
١ ، ٧ وأربعة = ١١
١ ، ستة = ٧

وهناك يكون خطر نسيان نقل الرقم الحقيقى الى الخانة العليا أقل بكثير لأن الأرقام العقلية الأخيرة فى كل مرة هى نتيجة الجمع الذى حصل فاذا كانت هذه النتيجة كما سبق هى ١٢أو١٣ . . . . . فالرقم المنقول يكون هو ١

وفضلا عن ذلك فاننا نشعر بالحاجة الى النقل فى الوقت اللائق الى العمود الثانى

وهناك أمثلة أخرى يحتاج فيها الى طرح جملة أعداد فى آن واحد ستأتى فى هذا الفصل

١٧٨ — الضرب

ان أول نقطة نستلفت اليها النظر هنا يجب البدء بضرب أعلى رقم من المضروب فيه حتى يكون حاصل الضرب الجزئى الأعظم أهمية هو الذى يتحصل أولا

٣٧٨,٦٢
٢٩,٣١٤
———————
٧٥٧٢,٤
٣٤٠٧,٥٨
١١٣,٥٨٦
٣,٧٨٦٢
١,٥١٤٤٨
———————
١١٠٩٨,٨٦٦٦٨

والأمر الثانى الذى هو ذو أهميــة عظيمة هو كيفية تعيين وضع المقادير وحواصل ضربهــا فى الرتب الاعشارية ولأجل عمل ذلك نطلق اسم الرتبــة على بعد أى عدد عن رتبة الآحاد فتكون الرتبة موجبة اذا كان الرقم الى جهة يسار الآحاد وسالبة اذا كان الرقم الى جهة اليمين

فعلى ذلك يكون العدد ٣٧٨,٦٢ مكونا من ٣ فى الرتبة ٢
و ٧ فى رتبة ١
و ٨ فى رتبة الصفر
و ٦ فى رتبة — ١
و ٢ فى رتبة — ٢

وبدلا من قولنا أن ٣ هى ٣ فى الرتبة الثانية يمكن أن يقال هى ٣٠ وحدة من الرتبة الأولى أو ٣٠٠ وحدة من رتبة الصفر الخ

ويلاحظ أن الرتبة هى نفس القوة لعدد ١٠ المشتمل عليها العدد وذلك لأن ٣ تدل على ٣٠٠ أى ٣ أمثال $١٠^{٢}$ أو ٣٠ مرة $١٠^{١}$ أو ٣٠٠ مرة $١٠^{٠}$ وهكذا فى الأعداد الأخرى مثلا ٦ هى ٦ أمثال $١٠^{-١}$ و ٢ هى ضعف $١٠^{-٢}$

و ينتج من ذلك أن أى عدد مثل ا رتبته م اذا ضرب فى عدد ب رتبته د فحاصل الضرب يساوى اب رتبته م+د

واذن ففى عملية الضرب الأولى عندنا حاصل ضرب ٢ من الرتبة الأولى فى ٢ من الرتبة — ٢ فالناتج هو ٤ من الرتبة — ١ أو ٠,٤ وعملية الضرب الأخيرة كانت ٤ من رتبة — ٣ مضروبة فى ٣ من رتبة ٢ فالناتج هو ١٢ من رتبة — ١ وأعلى رقم منه هو ١ من رتبة صفر وهذا هو أعلى رقم فى السطر ١,٥١٤٤٨

١٧٩ — الضرب المختصر

وفى كثير من الأحوال يحتاج الى معرفة ضرب عددين لغاية عدد قليل من الأرقام فقط وفى هذه الحالة يكون من المهم تجنب حساب جملة من الأرقام القليلة الأهمية والتى ستحذف فى آخر الأمر وسنعطى مثالا يبين كيفية عمل ذلك

فمثلا لنفرض أن المقصود ايجاد حاصل ضرب ٣٧٨,٦٢ فى ٢٩,٣١٤ الى أقرب عدد صحيح فيكون العمل كما يأتى فيحسب كل حاصل ضرب جزئى الى أول رقم اعشارى لأجل أن يتحقق من صحة مجموعها مقربا الى الوحدة

٣٧٨,٦٢
٢٩,٣١٤
―――――
٧٥٧٢,٤
٣٤٠٧,٦
١١٣,٦
٣,٨
١,٥
―――――
١١٠٩٩ الجواب

فهنا يكون الضرب فى ٢ تاما لأن حاصله ينزل الى أول رقم اعشارى فقط الا أن الضرب فى ٩ يبتدئ بضرب ٩ × ٦ وليس بضرب ٩ × ٢ لأن هذا الأخير ينزل الى رتبة الرقم الثانى الاعشارى (أو الى رتبة — ٢) التى لا احتياج اليها ومع ذلك فان نقل الرقم من ٩ الى ٢ محتاج اليه لأنه من رتبة — ١ أى أن ٩ أمثال ٢ هو ١٨ القريب الى ٢٠ أكثر من قربه الى ١٠ فالرقم المنقول هو ٢ واذن يؤول رقم ٥٤ الذى هو حاصل ضرب ٩ × ٦ الى ٥٦ فنضع منه ٦ وننقل ٥ والسطر الثانى يبتدى بثلاثة أمثال ٨ ومعه ٢ منقولة من ٣ أمثال ٦ المتروكة وهكذا

١٨٠ — القسمة الطويلة

والطرح بطريقة المتمم يتيسر بها اختصار تفاصيل العمل اللازم للقسمة الطويلة اختصارا عظيما فاذا أريد الحصول على خارج القسمة بالتقريب فقط فان هناك اختصارا مؤسسا على طريقة الضرب المختصر يترتب عليه زيادة اختصار العمل وهاك مثالا يبين العمل كله أولا والطريقة المختصرة ثم الطريقة الموجزة المستعملة فى الحصول على خارج القسمة مشتملا على ثلاثة أرقام فقط

مثال — المطلوب قسمة ١١٠٩٩ على ٣٧٨٫٦٢

(١)

	٣٧٨٫٦٢
١١٠٩٩٫٠	٢٩٫٣١٤
٧٥٧٢٫٤	
٣٥٢٦٫٦٠	
٣٤٠٧٫٥٨	
١١٩٫٠٢٠	
١١٣٫٥٨٦	
٥٫٤٣٤٠	
٣٫٧٨٦٢	
١٫٦٤٧٨	

(٢)

١١٠٩٩	٣٧٨,٦٢
٣٥٢٦٦	٢٩,٣١٤
١١٩٠٢	
٥٤٣٤	
١٦٤٧٨	

ففى الطريقة الثانية كونت عمليات الضرب عقليا ووضعت المقادير المحتاج اليها لاضافتها الى الحواصل المختلفة لأجل ايجاد الصف السابق من الأرقام فمثلا ٢ × ٢ = ٤ وستة = ١٠ ثم ٢ × ٦ + ١ = ١٣ وستة = ١٩ ثم ٢ × ٨ + ١ = ١٧ واثنين = ١٩ وهكذا فيكون الباقى ٣٥٢٦٦ وهكذا فى جميع البواقى الأخرى

وقد يكون من المشكل فى أول الأمر أن يكتب الباقى بهذه الكيفية مباشرة ولكن قليلاً من التمرين يعطى سرعة فى العمل ووثوقا بضبطه ويمكن التحقق من ضبط حساب البواقى بطريقة اسقاط التسعات التى يؤسس استعمالها على أن الباقى بعد قسمة أى عدد على ٩ هو نفس الباقى بعد قسمة مجموع أرقامه على ٩

فمثلا اذا قسم ٣٧٨٦٢ على ٩ فانه يبقى ٨ أو — ١ وكذلك اذا قسم ٣ + ٧ + ٨ + ٦ + ٢ واذن فمن السهل أن يعرف الباقى بمجرد النظر من قسمة أى عدد على ٩ (وذلك لأنه من الواضح أنه عند تكوين مجموع الأرقام المعنوية لا نضم أى عدد يكون مضاعفا للعدد ٩ فمثلا ٣ + ٧ + ٨ هو مضاعف لعدد ٩ واذن يرى أن الباقى هو ٦ + ٢)

ويمكن أن يسمى هذا الباقى زيادة العدد وذلك من باب الاختصار واذن . فزيادة ٣٧٨٦٢ هى ٨ أو — ١ أى أن هذا العدد هو بالصورة ٩ م — ١

واذن ففى هذا المثال تكون زيادة المقسوم عليه هى — ١ وزيادة المقسوم هى + ٢

وحواصل الضرب الجزئيـة هى ٢ (١٩ — ١) ، ٩ (١٩ — ١) ، ٣ (١٩ — ١) الخ أى أن الزيادات المتوالية هى — ٢ ، ٠ ، — ٣ ، — ١ ، — ٤

واذن فالباقى ٣٥٢٦٦ يلزم أن يحتوى على الزيادة ٢ + ٢ أو ٤
، ١١٩٠٢ » » » » ٤ + ٠ أو ٤
، ٥٤٣٤ يشتمل على الزيادات ٤ + ٣ أو ٧
، ١٦٤٧٨ » » » ١ + ٧ أو ٨

وهذا الأمر هو ما يتحقق بالامتحان

ولا ضرورة لاستعمال التحقيق فى كل باق بل فى الباقى الأخير لأن النظرية التى تستعمل فى هذا الصدد هى أن زيادة المقسوم — حاصل ضرب زيادة المقسوم عليه فى زيادة خارج القسمة = زيادة الباقى الأخير

واذن فاذا راعينا أن ٢٩٣١ (الذى زيادته = + ٦) هو خارج القسمة الذى يبقى الباقى ١٦٤٧٨ فانه يكون

زيادة ١٦٤٧٨ = + ٢ + ١ × ٦ = ٨

وهذا صحيح

واذا تبين من الامتحان عدم صحة الباقى الأخير يجب علينا أن نمتحن البواقى السابقة الى أن نصل الى باق يكون صحيحا فنسير فى العمل من بعده الى أن نصل الى موضع الخطأ

(٣) اذا أريد الحصول على خارج القسمة بالتقريب بأن يكون صحيحا لغاية ثلاثة أرقام فليس من الضرورى وجود جميع الحواصل فيمكن اختصارها بترك الأرقام الصغيرة من المقسوم عليه فالعمل المختصر مبين أولا بالحواصل المختصرة وثانيا بالبواقى فقط

١١٠٩٩	٣٧٨,٦٢
٧٥٧٢	٢٩,٣
٣٥٢٧	
٣٤٠٧	
١٢٠	

١١٠٩٩	٣٧٨,٦٢
٣٥٢٧	٢٩,٣
١٢٠	

١٨١ — وقد تختصر بعض عمليات الضرب والقسمة الكثيرة الوجود وتجعل بسيطة ببعض طرق مخصوصة وبعض تلك الطرق سيوضح فيما يلى

أما ما يتعلق من ذلك بالمقاييس والمكاييل المترية والانكليزية فستبين فى الفصل التالى

١٨٢ — الضرب فى النسبة التقريبية ط

ط هو رمز للنسبة بين محيط أى دائرة وقطرها ومقداره الرقمى هو ٣,١٤١٥٩٢٦٥٠٠٠٠٠٠ أو بالتقريب جدا ٣,١٤١٦ وهناك مقدار تقريبى وهو $٣\frac{١}{٧}$ وهو موافق فى الأحوال المعتادة الا أنه أكبر من الحقيقة بقدر $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$ من مقداره

أى أن $\text{ط} = \left(١ - \frac{٤}{١٠٠٠٠}\right) \times ٣\frac{١}{٧} = ٣,١٤١٦$

وبناء على ذلك اذا ضربنا فى $٣\frac{١}{٧}$ ثم طرحنا من الناتج مقدار حاصل ضربه فى $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$ أى أربعة وحدات من رتبة — ٤ فاننا نتحصل على نفس المقدار الذى يتحصل بالضرب فى ٣,١٤١٦ وبذلك تكون عملية الضرب أخصر مما يتحصل بالضرب فى ٣,١٤١٦ مباشرة

مثال — المطلوب تقدير قيمة ٧٣٦,٨٩ ط

(١)

٧٣٦,٨٩	
٣,١٤١٦	
٢٢١٠,٧٦	.... (١)
٧٣,٦٩	.... (٢)
٢٩,٤٧	.... (٣)
٠,٧٤	.... (٤)
٠,٤٤	.... (٥)
٢٣١٥,٠١	.... (٦)

(٢)

٧٣٦,٨٩	
$٣\frac{١}{٧}$	
٢٢١٠,٦٧	(١)
٠١٠٥,٢٧	(٢)
٢٣١٥,٩٤	(٣)
٩٣—	(٤)
٢٣١٥,٠١	(٥)

ففى (١) قد بينا عملية الضرب مباشرة وقد استلزمت ست عمليات

أما فى (٢) فالعملية المبينة بالوضع ($٣\frac{١}{٧}$) ($١ - \frac{٤}{١٠٠٠٠}$) وهى خمس عمليات والعملية الرابعة هى متحصلة بضرب ٢٣١٥,٩٤ فى أربعة آحاد من رتبة — ٤ وهذا يعطى بالضبط مقدارا أقل قليلا من ٠,٩٣ لأنه أقرب الى ٠,٩٣ أكثر من قربه الى ٠,٩٢

وهناك طريقة تقرب من هذه فى الضبط ونتحصل بأن نأخذ

$$ط = ٣\frac{١}{٧} - \frac{١}{٨٠٠}$$

وفى هذا المقدار كل العمليات تكون على السطر العلوى فيكون

٧٣٦,٨٩	
$٣\frac{١}{٧}$	
٢٢١٠,٦٧	..... (١)
١٠٥,٢٧	..... (٢)
٢٣١٥,٩٤	..... (٣)
٠,٩٢	..... (٤)
٢٣١٥,٠٢	..... (٥)

فالعملية الرابعة هنا هى قسمة ٧٣٦٫٨٩ على ٨٠٠

١٨٣ — القسمة على ط

للقسمة على $٣\frac{١}{٧}$ نضرب فى $\frac{٧}{٢٢}$ ونزيد الناتج بقدر $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$ من مقداره أى نأخذ

$$\frac{١}{ط} = \frac{٧}{٢٢}\left(١ + \frac{٤}{١٠٠٠٠}\right)$$

مثال — المطلوب قسمة ٢٣١٥٫٠١ على ط

٢٣١٥٫٠١
٧
―――――
١٦٢٠٥٫٠٧ ÷ ٢
٨١٥٢٫٥٣٥ ÷ ١١
―――――
٧٣٦٫٥٩٤
٠٫٢٩٥ +
―――――
٧٣٦٫٨٩

وهناك طريقة قريبة مما سبق فى الضبط بل أبسط وتتحصل بأن نأخذ

$$\frac{١}{ط} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{١٠٠} -$$

وهو أكبر من الحقيقة قليلا جدا

٢٣١٥٫٠١
―――――
٧٧١٫٦٧
٢٣٫١٥ −
١١٫٥٨ −
―――――
٧٣٦٫٩٤

فاذا أريد الحصول على دقة أعظم فعندنا

$$\frac{١}{ط} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{١٠٠} - \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{(٢٠٠)^٢}$$

ويكون العمل هكذا

$$\begin{array}{rr} & ٢٣١٥,٠١ \\ \hline & ٧٧١,٦٧ \\ - & ٢٣,١٥ \\ - & ١١,٥٧٥ \\ - & ,٠٥٨ \\ \hline & ٧٣٦,٨٩ \end{array}$$

١٨٤ — الضرب فى $ط^٢$

قد يحتاج اليه أحيانا ففى الأعمال التقريبية يكفى أن يؤخذ $ط^٢ = ١٠$

فاذا أريد التدقيق فاننا نأخذ $ظ^٢ = ١٠ (١ - ١٣٠٤ ,٠)$

مثال — المطلوب ايجاد مقدار ٧٣٦,٥٨ $ط^٢$

$$\begin{array}{rr} & ٧٣٦٥,٨ \\ - & ٧٣,٦٦ \\ - & ٢٢,١٠ \\ - & ٠,٢٩ \\ \hline & ٧٢٦٩,٧٥ \end{array}$$

١٨٥ — القسمة على $ط^٢$

$$\frac{١}{ط^٢} = ٠,١٠١٣٢١ = \frac{١}{١٠} (١ + ٠,٠١٣٢١)$$

فعملية الضرب مباشرة هنا بسيطة جدا فيجب أن نبدأ بأعلى رقم كما هو الواجب دائما

مثال — المطلوب قسمة ٧٢٦٩,٧٥ على ط٢

٧٢٦,٩٧٥
٧,٢٧٠
٢,١٨١
١٤٥
٧
———
٧٣٦,٥٧٨

وهناك مقدار آخر أقل دقة الا أنه لايزال كافيا فى الحسابات العملية فمن باب مساعدة المذاكرة نأخذ

$$ط^٢ = ١٠ (١ - ٠,٠١٣)$$

$$،\qquad \frac{١}{ط^٢} = \frac{١}{١٠} (١ + ٠,٠١٣)$$

والخطأ فى المقدار الثانى هو ٢ من ١٠٠٠٠ وفى المقدار الأول ٤ من ١٠٠٠٠٠ فقط

١٨٦ — تحويل الدرج الى التقدير الدائرى

ان المعامل هو $\frac{ط}{١٨٠} = ٠,٠١٧٤٥٣٢٩٢٥٢٠٠٠$

وهـذا المقدار يساوى على التقريب $\frac{٧}{٤٠٠} = ٠,٠١٧٥$ ويمكن أن يصير أدق بأن يطرح $\frac{١}{٤}$ فى المـائة من الناتج هكذا

$$\frac{٧}{٤٠٠} (١ - \frac{١}{٤٠٠}) = ٠,٠١٧٤٥٦٢٥$$

وهذا المقدار دقيق الى ٣ من ١٠٠٠٠ وموافق لجميع الأغراض العملية الا أنه قد يكون من المفيد أن يذكر التوسع الآتى فى التقريب

$$\frac{٧}{٤٠٠}\left(١ - \frac{١}{٤٠٠} - \frac{١}{٦٠٠٠}\right) = ٠٫٠١٧٤٥٣٣٣٠٠٠$$

وهذا المقدار دقيق الى $\frac{١}{٣}$ ٢ من المليون (أنظر مسألة ٦ من تمرينات ٢٨) فالعامل $\frac{٧}{٤٠٠}$ يمكن ان أريد أن يوضع بالصورة

$$\frac{١}{٦٠}\left(١ + \frac{١}{٢٠}\right) \text{ أو } \left(١ + \frac{١}{٢٠}\right)\frac{١}{٦٠}$$

والمقدار الأخير مرتب ترتيبا أوفق لكثير من الأحوال لأن القسمة على ٦٠ قبل ضم $\frac{١}{٢٠}$ قد يترتب عليه وجود أوقام اغشارية دائرة وهو أمر ممكن تجنبه اذا أضيف $\frac{١}{٢٠}$ اوّلا

مثال — المطلوب تحويل ٧٥٫٣٤ درجة الى التقدير الدائرى

$$\begin{array}{rl} ٧٥٫٣٤٠ & \div ٢٠ \\ ٣٫٧٦٧ & \\ \hline ٧٩٫١٠٧ & \div ٦٠ \\ \hline (١) \quad ١٫٣١٨٤٥ & \\ \hline ٠٫٠٠٣٢٩٦ & \text{أ} \div ٤٠٠ \\ ٠٫٠٠٠٢٢٠ & \text{أ} \div ٦٠٠٠ \\ \hline ١٫٣١٤٩٣٤ & \end{array}$$

الجواب ١٫٣١٤٩٣ زاوية نصف قطرية

اذا وجد فى الزاوية دقائق وثوان فان هذه تحول الى كسر أعشارى من الدرجة أو تحول هذه الدقائق والثوانى جميعها أو جزء منها الى ثوان ثم تحول إلى التقدير الدائرى بالمعامل

$$\frac{١}{١٠٠٠٠٠}\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٧٠} - \frac{١}{١١٠٠}\right)$$

وهذا المعامل يمكن تحقيقه بأنه تقريب كاف لمقدار $\frac{ط}{١٨٠ \times ٦٠ \times ٦٠}$ بالنسبة للزوايا الصغيرة ومقدار الخطأ فيها يساوى ١ من ٥٠٠٠٠ فقط

١٨٧ — تحويل التقدير الدائرى الى درج

لذلك يضرب فى ٦٠ ويطرح منه $\frac{١}{٢}$ ٤ فى المائة والناتج يكون أكبر من الحقيقة بقدر ٧٣ فى ١٠٠٠٠٠٠

وهذا المقدار دقيق دقة كافية لأغراض كثيرة وهو معادل لأخذ وحدة التقدير الدائرى مساوية الى °٥٧,٣

وأدق من ذلك أن تؤخذ وحدة التقدير مساوية الى ٥٧,٢٩٥٧٨ درجة = ٥٧,٣ — ٠,٠٠٤٢٢ وهذا مضبوط الى ١ من ١٠٠ مليون والمعامل المضبوط هو بناء على ذلك

$$٦٠ \left(١ - \frac{١}{٢} ٤ \% \right) - ٠,٠٠٤٢٢$$

مثال — المطلوب تحويل المقدار ٢,٧٥ زاوية نصف قطرية الى درج

$$
\begin{array}{rl}
٢,٧٥ & \\
٦٠ & \\
\hline
١٦٥,٠٠ & \\
\hline
٦,٦٠ & ٤ \% \\
٠,٨٢٥ & \frac{١}{٢} \% \\
\hline
١٥٧,٥٧٥ & = \quad \text{يطرح منه} \\
٠,٠١١٦ & = ٠,٠٠٤٢٢ \times ٢,٧٥ \\
\hline
١٥٧,٥٦٣٤ &
\end{array}
$$

الجواب ١٥٧,٥٦٣٤ درجة = °١٥٧ ′٣٣ ″٤٨

ويمكن اذا أريد أن يؤخذ التصحيح $\frac{١}{٢}$ ٤ فى المائة بالصورة $\frac{١}{٤٠} + \frac{١}{٥٠}$ بدلا من جعله بالصورة $\frac{٤}{١٠٠} + \frac{١}{٢٠٠}$ كما فى المثال السابق

تمرينات (٢٨)

(المطلوب أن تكون النتائج مضبوطة الى خمسة أرقام الا اذا أريد غير ذلك)

(١) المطلوب ايجاد حاصل ضرب ٨١٦,٣١٧٢ × ١٩,٤١٦٣ مضبوطا الى خمسة أرقام

(٢) المطلوب ايجاد ٠,٨٣ ÷ ٧٥٦٢٣ مضبوطا الى أربعة أرقام معنوية

(٣) المطلوب ايجاد ٦٧,٣٦٥ ÷ ٠,٤٣١٦٥ مضبوطا الى أربعة أرقام

(٤) المطلوب ايجاد مقدار ١٧٠٨,٤٥٩٢ × ٠,٠٠٠٤٤٤٠٨ ÷ ٠,٠٧٥٠٤٣ مضبوطا الى أربعة أرقام

(٥) المطلوب ايجاد مساحة دائرة نصف قطرها ١٣,٦٧٥ مترا بحيث يكون الحاصل مضبوطا الى خمسة أرقام (يبحث عن مقدار نق^{٢} بواسطة الضرب المختصر ثم يضرب الناتج فى ٣ + $\frac{١}{٧}$ ويطرح من الناتج $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$ من مقداره)

(٦) المطلوب بيان أن ط تكافئ المقدار الآتى

$$(١ + \frac{١}{٢٠})\ ٣ \left(١ - \frac{١}{٤٠٠} - \frac{١}{٦٠٠٠} - \frac{٢\frac{١}{٣}}{\text{مليون واحد}}\right)$$ مضبوطا الى تسعة أرقام

(٧) المطلوب استعمال المقدار السابق للنسبة ط فى مسألة (٥) لايجاد مساحة مضبوطة الى تسعة أرقام بحيث نتبع فى العملية الترتيب نق $(١ + \frac{١}{٢٠})$

ں × ٣ (١ − $\frac{١}{٤٠٠}$ − ٠ الخ) أى يضم فى أول الأمر $\frac{١}{٢٠}$ الى ١٣,٦٧٥ ثم يضرب الناتج فى ١٣,٦٧٥ ثم فى ٣ ثم تطرح المقادير الآتية لأجل التصحيح

$$\frac{١}{٤٠٠} ، \frac{١}{٦٠٠٠} ، \frac{١}{٥٠٠٠٠٠} ، \frac{١}{٣٠٠٠٠٠٠}$$

(٨) المطلوب حساب المقدار ٧٣١,٥٤ ط

(٩) المطلوب قسمة ٣٧,٥٤٣ على ط (١) بعملية القسمة المختصرة (٢) بكل من طريقتى التقريبات المتوالية السابق ذكرها

(١٠) المطلوب ايجاد مقدار ٥٧,٦٣٢ $ط^٢$ وامتحان الناتج بقسمته على $ط^٢$.

(١١) المطلوب قسمة ٥٧,٦٣٢ ÷ $ط^٢$ وامتحان الناتج بضربه فى $ط^٢$

(١٢) المطلوب تحويل الزوايا الآتية الى التقدير الدائرى

(١) °٣٩ ′٤ ″٣٠

(٢) °٤٣,٧٥٨

(٣) °٧٢ ′١٨ ″٤٠

(٤) °١٠ ′٣٢ ″٣

(٥) °٠ ′١٤ ″٣٢,٥

(١٣) المطلوب تحويل مضاعفات وحدة التقدير الدائرى الآتية الى درج وكسور اعشارية من الدرج أو الى درج ودقائق وثوان

(١) ٠,٧٥٤٣٢٠ (٢) ٠,٠١٧٤٥٣

(٣) ٢,٣١٥٨٢ (٤) ١٠,٠٥٨٢

الفصل العاشر

المقاييس الانكليزية والمقاييس المترية

١٨٨ — حيث ان معظم الأمم المتمدنة قد اتبعت الآن الطريقة المترية فى المقاييس والموازين وقد فعلت ذلك أيضا الأمة الانكليزية فى المواد العلمية فمن الضرورى أن يكون فى الامكان تحويل المقاييس والموازين الانكليزية الى ما تساويه من المقاييس المترية و بالعكس مع السهولة

وسنبين فى هذا الفصل شرحا مستوفيا نوعا للعلاقات بين الوحدات فى كل من الطريقتين موضحة بكيفية تسهل الحساب كثيرا أو قليلا وسنعطى أيضا بعض الارتباطات بين الوحدات المختلفة للمكاييل والموازين الانكليزية ومن الواضح أنه فى الارتباطات بين المقاييس الانكليزية والمترية لا يتحصل على الضبط التام مطلقا لأن أساس كل من هذه الوحدات غير مرتبط بأساس الأخرى واذن تتحصل الارتباطات بينها بالمقارنة العملية فقط

و يعتبر الارتباط الواقع بين الأطوال مضبوطا اذا كان صحيحا لحد ١ من ١٠٠٠٠٠ ولكن فى العمل يكتفى بضبط مقداره ١ من ١٠٠٠٠ لأن ذلك أضبط من أى قياس عادى معتنى به

و يكتفى فى كثير من الأعمال بضبط أقل مما ذكر بكثير والارتباطات الآتية مرتبة بحيث يجد الحاسب أى درجة من الدقة أراد

ومن أمثلة الارتباطات المضبوطة أن ١٠ بوصات = ٢٥٤ ملليمترا والخطأ فيه يساوى واحد من ١٠٠٠٠٠ تقريبا وهناك تقدير من أدق ما يمكن وهو ١٠ بوصات = ٢٥٣,٩٩٧٧٢ ملليمترا وهناك تقدير آخر مقرر فى قانون الموازين والمقاييس لسنة ١٨٧٨ وفيه ١٠ بوصات = ٢٥٣,٩٩٥٤ ملليمترا

ومن الارتباطات المضبوطة عمليا الارتباط

متر واحد = ٣ أقدام و $\frac{٣}{٨}$ ٣ بوصات = $\frac{٣}{٨}$ ٣٩ بوصة

أو بضبط مشابه لما ذكر

٣٢ مترا = ٣٥ ياردة

والخطأ فيه يساوى ١ من ١٠٠٠٠ تقريبا

ومن الارتباطات المضبوطة ضبطا تقريبيا ويسهل تذكرها أن ١٠ أمتار = ١١ ياردة وأن ٢٠ مترا = ٢٢ ياردة = جتريرا والخطأ فى هذا نحو $\frac{١}{٢}$ فى المائة لأن ٢٠ مترا تنقص عن المقدار المضبوط للطول الذى قدره ٢٢ ياردة بقدر $\frac{١}{٢}$ ٤ بوصات

وبضبط مشابه لما ذكر يكون طول ٨ كيلومترات مساويا الى ٥ أميال والسير بسرعة قدرها ٦ كيلومترات فى الساعة = $\frac{٣}{٤}$ ٣ أميال فى الساعة ويقابل سرعة قدرها كيلومتر واحد فى عشر دقائق أو ميل واحد فى ١٦ دقيقة

١٨٩ — والقواعد العملية الآتية مؤسسة على أحد الارتباطين الاتيين

١٠ بوصات = ٢٥٤ ملليمترا = ٢٥٫٤ سنتيمترا

٣٥ ياردة = ٣٢ مترا

(ومعلوم أن المتر = ١٠ ديسيمترات = ١٠٠ سنتيمتر = ١٠٠٠ ملليمتر وأن ١٠٠٠ متر = كيلومترا واحدا).

(١) كيفية تحويل بوصات الى سنتيمترات

لذلك نضرب عدد البوصات فى $\frac{١٠}{٤} + \frac{٤}{١٠٠}$

وتفضل هذه القاعدة على الضرب فى ٢,٥٤ لانها أخصر منها وسنعطى هنا مثالا يبين الطريقتين والأولى منهما هى الموصى بها والثانية بطريقة الضرب مبـاشرة

(١)	(٢)
٣٥,٦٤	٣٥,٦٤
٨٩,١٠	٧١,٢٨
١,٤٢	١٧,٨٢
٩٠,٥٢	١,٤٢
	٩٠,٥٢

(٢) تحويل الأقدام الى أمتار

لذلك نضرب عدد الأقدام فى $\frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{٥٠٠٠}$ [المساوى الى $\frac{١٢}{١٠٠} \left(\frac{١٠}{٤} + \frac{٤}{١٠٠}\right)$]

وهذا التقريب الأخير ممكن حذفه بالضرورة فى كثير من الأحوال

(٣) تحويل الياردات الى أمتار

لذلك نضرب عدد الياردات فى $١ - \frac{١}{١٠} + \frac{١}{٧٠}$ (لأن $\frac{٣٢}{٣٥} = \frac{٦٣+١}{٧٠} = \frac{٩}{١٠} + \frac{١}{٧٠}$)

(٤) تحويل سنتيمترات الى بوصات

لذلك نضرب عدد السنتيمترات فى $\frac{٤}{١٠} - \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{٨٠٠}$ (لأن $\frac{٣٩\frac{٣}{٨}}{١٠٠٠} = \frac{٤٠ - \frac{٥}{٨}}{١٠٠}$)

(٥) تحويل أمتار الى أقدام

لذلك نضرب عدد الأمتار فى $٣ + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣٢}$ (لأن $\frac{٣٩\ \frac{٣}{٨}}{١٢} = ٣ + \frac{١\ \frac{١}{٨}}{٤}$)

(٦) تحويل أمتار الى ياردات

لذلك نضرب عدد الأمتار فى $١ + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٩٦}$ (لأن $\frac{٣٩\ \frac{٣}{٨}}{٣٦} = ١ + \frac{١\ \frac{١}{٨}}{١٢}$)

١٩٠ — ولامتحان دقة ما تقدّم من التقريبيات نبحث عن الارتباط بين الكميات المذكورة فى بعض كتب المقاييس فنجد أن

١ بوصة = ٢,٥٤٠٠ سنتيمترا
١ قدم = ٠,٣٠٤٧٩٧ مترا
١ ياردة = ٠,٩١٤٣٩٢ »

و

١ سنتيمتر = ٠,٣٩٣٧٠ بوصة
١ متر = ٣,٢٨٠٨٧ أقدام
= ١,٠٩٣٦٢٣ ياردة

والعمل هو كما يأتى

(١) المطلوب تحويل ٣,٢٨٠٨٧ أقدام الى أمتار

فالقاعدة هى أن نضرب فى $\frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{٥٠٠٠}$

٣,٢٨٠٨٧
———
٠,٩٨٤٢٦١
٠,٠١٦٤٠٤
———
١,٠٠٠٦٦٥
— ٦٥٦
———
١,٠٠٠٠١

فالجواب يكون بالضرورة مترا واحدا وهذا هو اللازم مع دقة مساوية للدقة المستخرجة من أضبط المقاييس

(٢) المطلوب تحويل ١,٠٩٣٦٢٣ ياردة الى أمتار

فالقاعدة هى أن نضرب ١ — $\frac{١}{١٠} + \frac{١}{٧٠}$

١,٠٩٣٦٢٣
١٠٩٣٦٢
٠,٩٨٤٢٦١
١٥٦٢٣
٠,٩٩٩٨٨٤
١ — ٠,٠٠٠١١٦

واذن فهناك خطأ يبلغ مقداره ١ من ١٠٠٠٠

ويمكن امتحان المضاريب الأخرى بطريقة مشابهة لهذه فتوجد مضبوطة لحد ١ فى عشرة آلاف

١٩١ — وهذه العوامل وما أشبهها لتحويل السطوح والأحجام ستشرح فى الجداول الثلاثة الأولى

وقد بينا أيضا لوغاريتمات هذه المضاريب مشتملة على ستة أرقام اعشارية وذلك لتحويل المقاييس الانكليزية الى المترية لأجل الرجوع اليها عند الحاجة وهذه اللوغاريتمات لازمة فى تحويل المقاييس المترية الى الانكليزية أيضا الا أنها تطرح فى هذه الحالة

والجداول مرتبة فى ثلاثة أعمدة فالمضاريب اللازمة للتحويل الى المقاييس المترية فى العمود الأيمن ولوغاريتماتها فى الوسط والمضاريب اللازمة لتحويل المقاييس المترية الى المقاييس الانكليزية فى العمود الأيسر والأحسن توضيح ذلك بمثال

فالقانون الأول للتحويل من جدول الأطوال هو

$$\frac{\text{البوصة}}{\text{السنتيمتر}} = \frac{٤}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠}$$

ومعنى ذلك أن نسبة البوصة الى السنتيمتر هى $\frac{١٠}{٤} + \frac{٤}{١٠٠}$ أى أن البوصة = ($\frac{١٠}{٤} + \frac{٤}{١٠٠}$) سنتيمتر

وعلى ذلك يكون د بوصات = د ($\frac{١٠}{٤} + \frac{٤}{١٠٠}$) سنتيمتر

واذن فهذه الكمية أى $\frac{١٠}{٤} + \frac{٤}{١٠٠}$ هى المعامل الذى يستعمل لتحويل البوصات الى سنتيمترات

وفى الجدول الثانى يكون الكسر بالصورة $\frac{\text{بوصة مربعة}}{\text{سنتيمتر مربع}}$ ومعنى ذلك نسبة بوصة مربعة الى سنتيمتر مربع التى هى عبارة عن مربع النسبة $\frac{\text{بوصة}}{\text{سنتى}}$ من الممكن أن تكتب $\left(\frac{\text{بوصة}}{\text{سنتى}}\right)^{٢}$ ومعكوس هذه النسبة مكتوب فى العمود الأيسر بهذه الكيفية

وفى جدول الأحجام قد وضعت الكسور بحيث تكون بسيطة بساطة كافية تغنى عن وضعها بطريقة جبرية والضبط فيها هو على الأقل لحد واحد من ألف وربما كان هذا الضبط كافيا فى جميع الأغراض الا أن الجدول القانونى قد وضع أيضا لغرض استيفاء المبحث

والجدول الرابع هو جدول قصير خاص بالموازين

والجدول الخامس يشتمل على بعض ارتباطات بين الأثقال والأحجام وذلك بالنسبة للماء

وبواسطة هذا الجدول يمكن تعيين ثقل الماء اذا علم حجمه مباشرة وكذلك الحجم اذا علم الثقل

وفضلا عن ذلك فانه اذا علم الثقل النوعى لأى مادة فان هذا الجدول يستعمل فى تعيين الحجم اذا علم الثقل وبالعكس

مثال ـــ ان القدم المكعب من المـاء يزن ٦٢٫٣ رطلا فاذا كان الثقل النوعى يساوى سـ فثقل قدم مكعب من المـادة يساوى سـ (٦٢٫٣ رطلا) واذا كانت المادة سائلة فعندنا الارتباط جالون واحد يزن سـ × (١٠ أرطال) لأن جالونا واحدا من المـاء يزن ١٠ أرطال

أما فى الطريقة المترية فان الارتباط أبسط من ذلك لأن لترا واحدا من المـاء يزن كيلوجراما واحدا واذن فالثقل بالكيلوجرام لأى حجم من أى مادة = عدد اللترات التى فى الحجم مضروبا فى الوزن النوعى للمـادة

(١)

المقـاييس المترية الطولية

متر واحد = ١٠ ديسيمترات = ١٠٠ سنتيمتر = ١٠٠٠ ملليمتر

١٠٠٠ متر = ١٠٠ ديكامتر = ١٠ هكتومترات = ١ كيلومتر

مضاريب لتحويل المقاييس الانكليزية الى فرنساوية	لوغاريتمات	مضاريب لتحويل المقاييس المترية الى انكليزية
$\frac{\text{بوصة}}{\text{سنتيمتر}} = \frac{١٠}{٤} + \frac{١٠٠}{٤}$	٠٫٤٠٤٨٣٠	$\frac{\text{سنتيمتر}}{\text{بوصة}} = \frac{٤}{١٠} - \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{٨٠٠} - \frac{١}{٢٠٠٠٠}$
$\frac{\text{قدم}}{\text{متر}} = \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{٥٠٠٠}$	$\overline{١}$٫٤٨٤٠١١	$\frac{\text{متر}}{\text{قدم}} = ٣ + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣٢} - \frac{١}{٣٠٠٠}$
$\frac{\text{ياردة}}{\text{متر}} = ١ - \frac{١}{١٠} + \frac{١}{٧٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠}$	$\overline{١}$٫٩٦١١٣٢	$\frac{\text{متر}}{\text{ياردة}} = ١ + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٩٦} - \frac{١}{٨٠٠٠}$
$\frac{\text{ميل}}{\text{كيلومتر}} = \frac{٨}{٥}\left(١ + \frac{١}{٢٠٠} + \frac{١}{١٤٠٠}\right)$	٠٫٢٠٦٦٤٥	$\frac{\text{كيلومتر}}{\text{ميل}} = \frac{٥}{٨}\left(١ - \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{١٤٠٠}\right)$
$\frac{\text{جنزير}}{\text{متر}} = ٢٠\left(١ + \frac{١}{٢٠٠} + \frac{١}{١٤٠٠}\right)$	١٫٣٠٣٥٥٥	$\frac{\text{متر}}{\text{جنزير}} = \frac{١}{٢٠}\left(١ - \frac{١}{٢٠٠} - \frac{١}{١٤٠٠}\right)$

الجدول الثانى

المقاييس المترية للسطوح

المتر المربع = ١٠٠ ديسيمتر مربع = ١٠٠٠٠ سنتيمتر مربع = ١٠٠٠٠٠٠ ملليمتر مربع

١٠٠٠٠٠٠ متر مربع = ١٠٠٠٠ ديكا متر مربع = ١٠٠ هيكتو متر مربع = كيلو مترا مربعا

والارتباطات الرئيسة هى

١٠٠ سنتيمتر مربع = $\frac{١}{٢}$ ١٥ بوصة مربعة

و $\frac{١}{٣٠}$ ١٠ أمتار مربعة = ١٢ ياردة مربعة

والجدول الآتى يبين المضاريب ولوغاريتماتها

مضاريب لتحويل المقاييس الانكليزية الى مترية	لوغاريتمات	مضاريب لتحويل المقاييس المترية الى انكليزية
$\frac{\text{بوصة مربعة}}{\text{سنتيمتر مربع}} = \frac{٢٠٠}{٣١}$	٠,٨٠٩٦٦٠	$\left(\frac{\text{سنتيمتر}}{\text{بوصة}}\right)^{٢} = \frac{١}{١٠} + \frac{١}{٢٠} + \frac{١}{٢٠٠}$
$\frac{\text{قدم مربع}}{\text{متر مربع}} = \frac{١}{١٢}\left(١ + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧٠}\right)$	$\bar{٢}$,٩٦٨٠٣٣	$\left(\frac{\text{متر}}{\text{قدم}}\right)^{٢} = ١٠\,\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٧٠}$
$\frac{\text{ياردة مربعة}}{\text{متر مربع}} = \frac{١٠}{١٢}\left(١ + \frac{١}{٣٠٠}\right)$	$\bar{١}$,٩٢٢٣٦٥	$\left(\frac{\text{متر}}{\text{ياردة}}\right)^{٢} = \frac{١٢}{١٠}\left(١ - \frac{١}{٣٠٠}\right)$

وفضلا عما تقدّم توجد مقاييس الأراضى الآتية

١ آر = ١٠٠ متر مربع = ديكا مترا مربعا

١٠٠ آر = هيكتارا واحدا

١٠٠ هيكتار = كيلو مترا مربعا

وهاك ارتباطات تقريبية

١٠ آر = ١١٩٦ ياردة مربعة = ربع فدان انكليزى تقريبا
١ هكتار = = $\frac{١}{٢}$ ٢ فدانا انكليزيا »
١ كيلومترمربع = = ٢٥٠ » » »

ومعامل التصحيح فى كل حالة هو ١ — ٠٫٠١١٦ أى أن الخطأ هو نحو $\frac{١}{٦}$ ١ فى المائة ففى تحويل المقاييس الانكليزية الى مقاييس مترية يلزم أن يضم نحو $\frac{١}{٦}$ ١ فى المائة لأجل التصحيح

(٣)
المقاييس المترية للأحجام

هذه المقاييس هى مكعبات مقاييس الأطوال

فالديسيمتر المكعب يسمى لترا وهو المقياس الأساسى لتقدير السوائل والحبوب وما أشبهها فأما التراب والحصى ونحوها تتقدر بالمتر المكعب

والمقياس الأساسى الانكليزى لتقدير السوائل هو الجالون وهو مرتبط بالمقاييس الانكليزية الأخرى للحجم بالارتباطات التقريبية الآتية)

٣٦ جالونا تساوى ١٠٠٠٠ بوصة مكعبة

$\frac{١}{٤}$٦ جالونات تساوى قدما مكعبا واحدا

وهناك ارتباط أضبط وهو أن ١٠٠٠٠ بوصة مكعبة تعادل $\frac{١}{١٨}$ ٣٦ جالونا أى ان ٣٦ جالونا تنقص عن ١٠٠٠٠ بوصة مكعبة بقدر $\frac{١}{٢}$ ١٥ بوصة مكعبة و ١٠٠ قدم مكعب = ٦٢٣ جالونا وعلى ذلك يكون القدم المكعب معادلا الى (٦ + $\frac{١}{٤}$ — $\frac{١}{٥٠}$) من الجالون = ٦ (١ + $\frac{١}{٣٠}$ + $\frac{١}{٢٠٠}$) جالونا و ١٠٠ جالون تساوى $\frac{١}{٣٠}$ ١٦ قدما مكعبا

المتر المكعب الواحد = ١٠٠٠ ليتر
الليتر الواحد = ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب
السنتيمتر المكعب الواحد = ١٠٠٠ ملايمتر مكعب

والارتباطات بين هذه والمقاييس الانكليزية (مع ضبط الى جزء من ألف جزء على الأقل) هى كما يأتى

$\frac{٢}{٥}$ ١٦ سنتيمترا مكعبا	=	بوصة مكعبة واحدة
٦١ بوصة مكعبة	=	ليترا واحدا
$\frac{١}{٣}$ ٢٨ ليترا	=	قدما مكعبا واحدا
$\frac{١}{٣}$ ٣٥ قدما مكعبا	=	مترا « «
١٧ ياردة مكعبة	=	١٣ مترا مكعبا
١٠٠ ليتر	=	٢٢ جالونا
٤٠٠ ليتر	=	١١ بوشل

أى ان الليتر = نحو $\frac{٧}{٨}$ كوارت

والجدول الآتى يعطى مقدار المضاريب ولوغاريتماتها

عوامل تحويل المقاييس الانكليزية الى مقاييس مترية	لوغاريتمات	عوامل لتحويل المقاييس المترية الى مقاييس انكليزية
$\left(\frac{\text{بوصة}}{\text{سنتيمتر}}\right)^{٣} = ١٦(١ + \frac{١}{٤٠} - \frac{١}{١٢٠٠})$	١٫٢١٤٤٩٠	
$\frac{(\text{قدم})^{٣}}{\text{ليتر}} = ٢٨ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٦٠}$ (١)	١٫٤٥٢٠٣٤	$\frac{\text{ليتر}}{(\text{بوصة})^{٣}} = ٦١(١ + \frac{٤}{١٠٠٠٠})$.
$\left(\frac{\text{قدم}}{\text{متر}}\right)^{٣} = \frac{١}{٤٠} + \frac{١}{٣٠٠} - \frac{١}{٦٠٠٠٠}$	$\bar{٢}$٫٤٥٢٠٣٤	$\left(\frac{\text{متر}}{\text{قدم}}\right)^{٣} = ٣٥ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٦٠}$ (١)
$\left(\frac{\text{ياردة}}{\text{متر}}\right)^{٣} = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٧٠} + \frac{١}{٤٠٠٠}$	$\bar{١}$٫٨٨٣٣٩٨	$\left(\frac{\text{متر}}{\text{ياردة}}\right)^{٣} = \frac{٤}{٣} - \frac{١}{٤٠} - \frac{١}{٣٠٠٠}$

(١) وينبغى أن يلاحظ أن $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٦٠} = \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٦٠} = \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{٢٠}$.
وهذه المسألة انما تتعلق بأى هيئة هى الأحسن

(٤)
المقاييس المترية للأوزان

١ كيلو جرام = ١٠٠٠ جرام

١٠٠٠ كيلو جرام = طونولاته

وذلك مع مراعاة الارتباطات

١٠ كيلوجرامات = ٢٢ رطلا انكليزيا × (١ + ٠,٠٠٢١)

طونولاته واحدة = طنا انكليزيا واحدا × (١ — ٠,٠١٦)

والارتباطات العكسية هى

٢٢ رطلا = ١٠ (١ — ٠,٠٠٢١) كيلو جراما

طن واحد (انكليزى) = ١ + ٠,٠١٦ طونولاته (فرنسية)

ومن هنا يستنتج

٥٠ كيلوجراما = قنطارا انكليزيا — $\frac{٣}{٤}$ ١ رطلا

6

طونولاته فرنسية = طنا انكليزيا ناقصا ٣٦ رطلا

* وعلى وجه العموم فيكفى أن يعوّل على ضبط المقدار بأخذ ١٠ كيلو جراما = ٢٢ رطلا بدون استعمال معامل التصحيح

(٥)

الارتباطات بين ثقل المـاء وحجمه

(بالضـــبط)

جالون واحد فى درجة حرارة ٦٢° فارنهيت يزن ١٠ أرطال وذلك بمقتضى قوانين الحكومة الانكليزية

ليتر واحد فى درجة ٤ مئينية يزن كيلوجراما

(بالتقريب)

القدم المكعب الواحد يزن ١٠٠٠ أوقية أو $\frac{١}{٢}$ ٦٢ رطلا تقريبا

وهناك نسبة أضبط من ذلك أن القدم المكعب يزن ٦٢,٣ رطلا

ملحوظة — وليس من المفيد الحصول على دقة شـديدة فى الارتباطات التى بين أوزان السوائل وأحجامها لأن هذه الأحجام تتغير تغيرا عظيما مع تغير درجة الحرارة فمثلا أن حجم مقدار معين من المـاء درجة حرارته ٦٢ فارنهيت يزيد عن حجم المقدار عينه الذى درجة حرارته ٤ درجات مئينية بقدر $\frac{١}{١٠٠٠}$ غير أنه من المفيد أن نلاحظ أن هذه الحقيقة تجعل الارتباط الذى هو ١٠٠ ليتر = ٢٢ جالونا أضبط من الارتباط الذى هو ١٠ كيلوجرامات = ٢٢ رطلا بقدر الضعف لأن الارتباط الأول لايشتمل الا على خطأ مقداره ١ فى ١٠٠٠ أما الثانى فان الخطأ فيه يعادل ٢ فى ١٠٠٠

تمرينات (٢٩)

(١) المطلوب تحويل الأطوال الآتية الى أمتار

(١) ٣٧ قدما و ٦ بوصات

(٢) ٥٤ ياردة و ٢ قدم و ٣ بوصات

(٣) ٢٩,٣٥٢ قدما

(٤) ٤٣,٥٢٦ جنزيرا

(٢) المطلوب تحويل

(١) ٣٧,٥٤٢ مترا الى ياردات

(٢) ٤٣,٣٨٩ سنتيمترا الى بوصات

(٣) ٣٣٨٧ مترا الى أقدام

(٣) نصفا قطرى قاعدتى مخروط ناقص هما ١٧,٥٤ بوصة و ٢٣,٢٨ بوصة

والمطلوب بيان مساحة القاعدتين والقطاع الواقع فى وسط الارتفاع بالسنتيمتر المربع

(٤) قبة على شكل نصف كرة قطرها يساوى ٣٢٧ قدما والمطلوب ايجاد مقدار سطحها وحجمها بالأمتار المربعة والمكعبة

(٥) المطلوب ايجاد ثقل بوصة مكعبة من الحديد بالاوقية بفرض أن الثقل النوعى للحديد ٧,٨

(٦) المطلوب حساب كمية الأمتار المكعبة للاتربة المستخرجة من حفر بئر عمقها ١٠٠ متر وقطرها متران

مع بيان الجواب بالياردة المكعبة أيضا

(٧) المطلوب بيان اللترات من المـاء التى تشتمل عليها تلك البئر اذا كانت مملوءة الى النصف

(٨) المطلوب ايجاد ثقل المـاء الذى يشتمل عليه اناء اسطوانى عمقه ٣٠ سنتيمترا وقطره ٢٥ سنتيمترا

ملحوظة — ان عدد الليترات هو بعينه عدد الكيلوجرامات

المطلوب بيان الجواب بالكيلوجرامات و بالأرطال

(٩) المطلوب ايجاد ثقل قضيب اسـطوانى من الحديد طوله ٣ متر ومحيطه ٢٠ سنتيمترا وثقله النوعى ٧,٨

(١٠) المطلوب تحويل المسائح الآتية الى أمتار مربعة

(١) ١٣٧,٥٨ ياردة مربعة

(٢) ١٤٣,٢٣ قدما مربعا

(٣) ٣٩ ياردة مربعة و ٥ أقدام مربعة و ٤٦ بوصة مربعة

(٤) $\frac{1}{4}$ ٣٠ ياردة مربعة

(١١) المطلوب تحويل المسطحات الآتية الى آرات وهيكتارات

(١) $\frac{3}{4}$ ١٣ فدانا انكليزيا

(٢) ٣٠٠ فدان انكليزى

(١٢) اذا كانت طريحة البناء بالطوب الأحمر الذى سمكه $\frac{1}{2}$ ١ طوبة تعادل مسطحا قدره $\frac{1}{4}$ ٣٠ ياردة مربعة واعتبرنا أن هذا القدر يعادل ٢٥ مترا

مربعا فالمطلوب ايجاد عدد الطرائح من الطوب التى تلزم لأجل بنـاء البئر التى فى مسألة (٦) مع فرض أن سمك الحائط هو نفس السمك السابق بيانه

(١٣) المطلوب ايجاد ثقل كرة من الحديد قطرها ٣٠ سـنتيمترا بفرض الوزن النوعى للحديد ٧٫٨

(١٤) المطلوب ايجاد سعة برميل ارتفاعه ½ ١ متر وكل من قطرى نهايتيه ٨٠ سنتيمترا وقطر القطاع الذى فى وسط الارتفاع يساوى مترا وجميع المقاسات مأخوذة من الداخل

مع بيان السعة باللیتر والجالون

(١٥) المطلوب ايجاد سعة خوض مستقيم قطاعه على شكل V وطوله ½ ٢ مترا وطول كل جانب من جانبي القطاع ٢٥ سنتيمترا والزاوية الواقعة بينهما تساوى ٩٠°

(١٦) المطلوب بيـان المقادير الآتية باللیتر

(١) ٣٤٧٨ قدما مكعبا

(٢) ٢٩٢ ياردة مكعبة

(٣) ٢١٧٥ بوصة مكعبة

(١٧) المطلوب تحويل

(١) ١٠٠٠ ليتر الى أقدام مكعبة

(٢) ٣٤٩٨ ليترا الى أقدام مكعبة

(٣) ٦٠٠٠ متر مكعب الى ياردات مكعبة

(١٨) المطلوب تحويل المقادير الآتية الى ليترات وامتحان النتيجة بتحويل الناتج ثانيا الى جالونات

(١) ١٨ جالونا
(٢) ٣٢٩٨ جالونا
(٣) ٥٠٠٠٠ جالون
(٤) ١٥ جالونا و ٣ كورات و پنت واحد
(٥) ٥٠٠ بوشل

(١٩) المطلوب تحويل ٧٢٩ قدما مكعبا الى جالونات ثم الى ليترات ثم تحويلها مباشرة الى ليترات

(٢٠) المطلوب تحويل ٥٨٧٦ بوصة مكعبة الى جالونات ثم الى ليترات ثم تحويلها مباشرة الى ليترات

١٩٢ — وهناك جملة طرق خاصة تستعمل فى الحساب العملى وذلك لأجل أن تفى بالصعوبات الناشئة عن تشعب جداول المقاييس والمكاييل الانكليزية

ومن أمثلة ذلك ما يأتى

لايجاد عدد الجالونات من الماء فى اسطوانة (مثل بئر) نضرب عمق الماء بالياردة فى مربع قطر الاسطوانة بالبوصة ويقسم الناتج على عشرة فالناتج هو عدد الجالونات مقربا بقدر ٢ فى المائة

واذا لم يقسم حاصل الضرب السابق ذكره على عشرة فالناتج يكون هو ثقل الماء بالرطل

وذلك لأن الجالون من المـاء يزن ١٠ أرطال

ولاثبات ذلك نقول — كمية المـاء = $\frac{ط}{٤}$ (القطر)^{٢} × العمق

فلنفرض أن القطر = ى بوصات

والعمق = ع ياردات

فالكمية = $\frac{ط}{٤}$ (ى بوصات)^{٢} × (ع ياردات)

= ى^{٢} ع $\frac{ط}{٤}$ (بوصات)^{٢} × (ياردات)

= ى^{٢} ع $\frac{ط}{٤}$ $\left(\frac{قدم}{١٢}\right)^{٢}$ × ٣ أقدام

= ى^{٢} ع $\frac{٣ ط}{٤ × ١٤٤}$ (أقدام)^{٣}

= ى^{٢} ع $\frac{٦ × ٣ ط}{٤ × ١٤٤}$ (١ + $\frac{١}{٣٠}$ + $\frac{١}{٢٠٠}$) جالونا

لأن ١ (قدم)^{٣} = ٦ (١ + $\frac{١}{٣٠}$ + $\frac{١}{٢٠٠}$) جالونات

وبحساب هـذا الكسر يرى أنه يسـاوى $\frac{١}{١٠}$ × ١٫٠١٩٤ أو تقريبـا $\frac{١}{١٠}$ (١ + $\frac{١}{٥٠}$)

واذن يكون

كمية المـاء = $\frac{١}{١٠}$ ى^{٢} ع جالونات زائدا تصحيحا قدره اثنان فى المـائة

ثم

ثقل المـاء = ى^{٢} ع بالرطل زائدا تصحيحا قدره اثنان فى المـائة

وهناك تطبيقات كثيرة جدا لهذه المتساويات كما يظهر من الأمثلة الآتية فاذا لم يكن الاناء اسطوانيا فيلزم البحث عن مربع قطر الاسطوانة المكافئة له

واستعمالها فى القانون فاذا أريد الحصول على الليترات بدلا من الجالونات أو الكيلو جرامات بدل الأرطال فالقانون المطلوب هو $\frac{١٠}{٢٢}$ ق^{٢} ع ويمكن استعمال معامل التصحيح وهو (١ + $\frac{١}{٥٠}$) أو عدم استعماله على حسب درجة الضبط المطلوبة .

١٩٣ — والجدول الآتى النافع فى الأعمال العملية قد وضع هنا للرجوع اليه اذا اقتضى الحال وقد يحتاج الى جزء منه فى حل المسائل الأخيرة من المسائل المختلفة الآتية فى آخر الكتاب

جدول الأثقال

ثقل القدم المكعب بالرطل		ثقل القدم المكعب بالرطل	
حديد زهر	٤٥٠	حجر رملى	١٥٥
حد. مطروق صلب اين	٤٨٠	طوب أحمر	١١٢
صلب مسحوب	٤٩٦	خرسانة	١٢٠
نحاس أصفر	٥٢٠	تراب	١٠٠
نحاس أحمر	٥٥٠	ماء (عذب)	٦٢٫٣̄
خشب	٤٥	ماء (ملح)	٦٤

تمرينات (٣٠)

(١) المطلوب ايجاد عدد الجالونات التى تنصرف فى الساعة من ماسورة اسطوانية قطرها قدمان وهى مملوءة الى نصفها وسرعة تصرف المياه ميل واحد فى الساعة

(٢) المطلوب ايجاد عدد الجالونات التى تشتمل عليها بئر قطرها ٣٠ بوصة وعمق المـاء فيها ٣٠ قدما

(٣) سـعة البوشل الواحد يساوى ٨ جالونات والمكيال الرسمى للبوشل هو اسطوانة مجوفة عمقها الداخل يسـاوى نصف قطرها الداخل والمطلوب ايجاد كل من العمق والقطر المذكورين

(٤) المطلوب ايجاد ثقل قضيب اسطوانى من الحديد طوله ١٠ أقدام وقطره ٣ بوصات ووزنه النوعى ٧٫٨

(٥) المطلوب بيـان أن ثقل اسطوانة مجوفة طولها ع ياردة وقطرها الداخل والخارج هما $ق_١$ ، $ق_٢$ بالبوصة يساوى بالأرطال

$$ع \,(ق_١^٢ - ق_٢^٢) \times \text{الوزن النوعى للمادة}$$

وان معامل التصحيح لهذه الكمية هو $(١ + \frac{١}{٥٠})$ وتطبيق هذا القانون لتعيين وزن القضيب فى مسألة ٤ بفرض أنه مجوف وأن قطر التجويف يساوى ٢ بوصة

(٦) حجم أى جسم ناقص يساوى ارتفاعه مضروبا فى قطاعه العرضى المتوسط المساوى للقطاع العرضى للأسطوانة المساوية له فى الارتفاع والحجم (المسماة بالأسطوانة المكافئة) ومن هنا يطلب بيان أن

$$\text{مربع قطر الأسطوانة المكافئة} = \text{القطاع العرضى المتوسط} \times \frac{٤}{ط}$$

(٧) المطلوب بيــان أنه فى حالة المخروط الناقص والقطعــة الكروية الناقصة يكون مربع قطر الاسطوانة المكافئة مساويا الى

$$\frac{١}{٦}(ق_{١}^{٢} + ٤ ق_{٢}^{٢} + ق_{٣}^{٢})$$

وفى هذا القانون $ق_{١}$ ، $ق_{٣}$ هما قطرا القاعدتين ، $ق_{٢}$ هو قطر القطاع المتوسط الموازى للقاعدتين

(٨) المطلوب بيان أنه فى حالة الكرة التى قطرها ق يكون مربع القطر للأســطوانة المكافئة $\frac{٢}{٣}$ $ق^{٢}$ (ومن الواضح أن ارتفاع الأسطوانة يساوى أيضا ق)

ومن ثم بيان أن الثقــل بالرطل لكرة من المــاء عدد الياردات التى يشتمل عليهــا ق مضروبا فى $\frac{٢}{٣}$ عدد مربع البوصات المشــتمل عليهــا $ق^{٢}$ ومعامل التصحيح هو $(١ + \frac{١}{٥٠})$

(٩). المطلوب تعيين حجم كرة قطرها قدم واحد (أولا) اذا كانت كثافتها مساوية لكثافة المــاء (ثانيا) اذا كانت من الحديد الذى كثافته تساوى ٧٫٨

(١٠) المطلوب ايجاد عدد الجالونات التى تشــتمل عليها سعة دلو شكله مخروط ناقص ارتفاعه $١٠\frac{١}{٢}$ بوصات وقطرا قاعدتيه ١١ ، ٩ بوصات على التناظر وجميع المقاسات مأخوذة من الداخل

(١١) المطلوب ايجاد عدد الجالونات التى تشتمل عليها سعة برميل لخزن ماء الأمطار ارتفاعه ٦ أقدام وقطراه الداخلان للقاعدتين ٣٠ بوصة وقطره فى وسط ارتفاعه ٣ أقدام

(١٢) اذا كان برميل سعته ٩ جالونات وقطره الداخلى الأعلى ١٢ بوصة وقطره فى وسط ارتفاعه ١٤ بوصة فالمطلوب ايجاد الارتفاع الداخل للبرميل .

(١٣) اذا استعمل محيط الاسطوانة المكافئة بدلا من القطر وكان طول المحيط م بالبوصة والارتفاع ع بالياردة فالمطلوب بيان أن عدد الجالونات $= \frac{ع م^{٢}}{١٠٠}\left(١ + \frac{١}{٣٠}\right)$

[بملاحظة أن $ق^{٢} = \left(\frac{م}{ط}\right)^{٢} = \frac{١}{١٠} م^{٢} \times ١٫٠١٣٢١$]

(١٤) فى المسألة السابقة المطلوب بيـان أن $\frac{ع م^{٢}}{٢٢}\left(١ + \frac{١}{٣٠}\right)$ يعطى عدد الليترات ومن هذا المقدار مضروبا فى الوزن النوعى للجسم يعطى الوزن بالكيلو جرام

(١٥) عامود منشأ من الحجر بشكل أسطوانى ارتفاعه ١٠ أقدام ومحيطه ٤٠ بوصة فما ثقله بفرض أنه منشأ من حجر كثافته ٢٫٨

(١٦) بركة على شكل مخروط ناقص عمقها ٤ أقدام ومحيطها ١٠٠ قدم من أعلى و٣٠ قدما من أسفل فما سعتها بالجالون

(١٧) اذا كان القطاع العرضى لاسطوانة أو منشور = ا بوصة مربعة وارتفاعها يساوى ع ياردات فالمطلوب بيان أن السعة بالجالون $= \frac{١٣}{١٠٠}$ ا ع وان تلك السعة باللتر تساوى $\frac{١٣}{٢٢}$ ا ع $= \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{١١}\right)$ ا ع

(أنظر مسألة ٦)

(١٨) المطلوب ايجاد ثقل كتلة من الخشب طولها ٢٠ قدما وقطاعها العرضى مستطيل مساحته ٢٠ × ١٠ بوصة مربعة مع فرض أن الوزن النوعى للخشب ٠٫٨٠

(١٩) المطلوب ايجاد ثقل جسم ناقص من الحجر ارتفاعه ١٠ أقدام وقاعدته السفلى مستطيل بعداه ١٥ قدما × ١٠ أقدام وقاعدته العليا مستطيل بعداه ٨ أقدام × ٥ أقدام والوزن النوعى للحجر = ٢,٨

(٢٠) المطلوب ايجاد ثقل قدم مكعب من الحديد الذى وزنه النوعى ٧,٨

(٢١) المطلوب ايجاد ثقل مخروط مجوّف من الحديد ارتفاعه قدمان والقطر الداخل والخارج لقاعدته يساويان ١٨ بوصة و ١٥ بوصة على التناظر وسمك الحديد واحد فى المخروط جميعه

تنبيـه — يجب تعيين ارتفاع التجويف المخروطى والمخروط المجوّف هو الفرق بين مخروطين مصمتين

مسائل مختلفة

(١) المطلوب ايجاد عدد الأمتار المربعة التى يشتمل عليها متوازى أضلاع ضلعه الأطول يساوى ٦٩ مترا وضلعه الأقصر يساوى ٥٢ مترا وقطره الأقصر يساوى ٢٩ مترا

(٢) مخروط طول محيط قاعدته ٢٢ مترا وراسمه $\frac{٣}{٨}$ ٤ أمتار والمطلوب ايجاد عدد الأمتار المكعبة التى يشتمل عليها بفرض أن ط = $\frac{١}{٧}$ ٣

(٣) اذا فرض أن القدم المكعب من الماء يزن ١٠٠٠ أوقية وأن البنت منه يزن رطلا وربعا فما عدد البوصات المكعبة فى الجالون

(٤) المطلوب البرهنة على أن سهم أى قوس دائرى يساوى مربع وتر نصفه مقسوما على قطر الدائرة

(٥) المطلوب ايجاد مساحة المثلث الذى أضلاعه ١٧ مترا و ٢٨ مترا و ٣٩ مترا

(٦) مامقدار القماش اللازم لانشاء خيمة مخروطية الشكل ارتفاعها ٤ أمتار وقطر قاعدتها ٢,٥٠ متر

(٧) اذا كان ثقل الفحم يزيد عن ثقل الماء بقدر الربع فما ثقل الياردة المكعبة منه بالرطل اذا كان ثقل المتر المكعب من الماء ١٠٠٠ كيلو جرام

(٨) مكعب من المعدن ضلعه ٠,١٤ متر صهر وصب فى شكل مخروط قائم ارتفاعه ٠,٥٠ مترا فالمطلوب معرفة نصف قطر القاعدة

(٩) دائرة نصف قطرها ٦ أمتار تمس الضلعين المتساويين من مثلث متساوى الساقين فى نهايتهما فاذا كان طول كل ضلع منهما ٨ أمتار فما طول القاعدة

(١٠) صندوق ذو غطاء مصنوع من خشب سمكه ٠,٠٣٧٥ متر فاذا كان مقاس كل ضلع من أضلاعه الخارجية ١,٠٥ متر فالمطلوب ايجاد مسطح الخشب المستعمل فى الانشاء بالضبط

(١١) برج دائرى قطره الداخلى ٥ أمتار وسمك حائطه ٠,٧٠ متر فما مسطح أرض قاعدة حائطه

(١٢) ما طول مواسير الحديد التى يبلغ وزنها طونولاتة واحدة اذا كان قطرها الداخلى ٠,٠٧٥ مترا وسمكها ٠,٠٠٦٢٥ مترا وثقل السنتيمتر المكعب من الحديد ٧,٨٠ جرامات

(١٣) نصفا قطرى نهايتى مخروط ناقص دائرى قائم هما ٥ أمتار و ٨ أمتار وطول الراسم ٤ أمتار فاذا قسم المخروط الناقص المذكور الى مخروطين ناقصين متساويين فى السطح الجانبى فما طول راسم كل واحد منهما

(١٤) غرفة طولها ٨,٥٠ أمتار وعرضها ٦ أمتار وارتفاعها ٤,٨٠ أمتار زخرفت بورق عرضه ٠,٧٨ مترا وثمن المتر الطولى منه ٦٥ ملليما فما ثمن هذا الورق اللازم

(١٥) حقل مربع مساحته ٤ قراريط و ٨ أفدنة فما ضلعه وما قطره

(١٦) مثلث قائم الزاوية ضلعا زاويته القائمة ١٨٥ مترا و ٨٤ مترا. والمطلوب ايجاد الفرق بين مساحته ومساحة نصف الدائرة المرسومة على وتره

(١٧) متوازى مستطيلات قاعدته مربع وارتفاعه ١ متر وحجمه ١,١٢٥ متر مكعب فما ضلع مربع القاعدة

(١٨) المطلوب ايجاد حجم مخروط دائرى ارتفاعه ٤,٥٠ أمتار ومحيط قاعدته ٤,٨٠ أمتار

(١٩) اسطوانة قطرها ٠,٩ متروطولها ١,٥ متر مقفلة من طرفيها بنصفى كرة والمطلوب ايجاد السطح الكلى والحجم الكلى لهذا الجسم

(٢٠) طريق طوله ٨ كيلومترات وعرضه ٢٠ مترا فما مسطح أرضه بالفـــدان

(٢١) اذان كان القدم المكعب من الماء يزن ١٠٠٠ أوقيـة انكليزية والجالون منه يزن عشرة أرطال انكليزية فالمطلوب ايجاد عمق وعاء اسطوانى قطره ١١ بوصة ويسع ٤ $\frac{١}{٢}$ جالونات بحيث يكون الناتج مضبوطا الى جزء من مائة من البوصة

(٢٢) كرة معدنية حجمها ٠,١٢٥ متر مكعب فما مساحة سطحها

(٢٣) مخروط ناقص قطرا قاعدتيه ٤,٨٠ أمتار و ٣,٦٠ أمتار على التناظر وارتفاعه ١٥,٠ متر فما حجمه

(٢٤) اذا كان الطول البالغ ٨٠٠٠ متر يساوى خمسة أميال والمكعب الذى ضلعه ستة أقدام يزن ٦ أطنان والمتر المكعب من المادة نفسها يزن ١٠٠٠ كيلو جرام فالمطلوب ايجاد النسبة بين الكيلو جرام والرطل الانكليزى

(٢٥) المطلوب ايجاد قطر الدائرة التى حجمها متر مكعب واحد مقربا الى جزء من مائة من المليمتر

(٢٦) مخروط ناقص ارتفاعه ٢٨ مترا وقطر احدى نهايتيه ٣ أمتار وقطر النهاية الأخرى ٢,٣٠ متر والمطلوب ايجاد حجمه بالمتر المكعب بحيث يشتمل الناتج على ثلاثة أرقام اعشارية

(٢٧) مخروط ارتفـاعه ٦٠ مترا وزاوية ميل راسمه على الأفق ٣٠ ْ فما حجمه وما مساحة سطحه المنحنى

(٢٨) المطلوب ايجاد حجم مخروط ناقص ارتفاعه ١,٢٠ متر ونصفا قطرى قاعدتيه ٠,٣٠ متر ٦ ٠,٩٠ متر على التناظر وايجاد مقدار زاوية رأس المخروط التام وارتفاعه

(٢٩) المطلوب بيان حجم وسطح كرة نصف قطرها ٢,٢٥ متر

(٣٠) ارتفـاع مخروط ناقص يساوى ٤٠ مترا ونصفا قطرى قاعدتيـه ٢٥ مترا ٦ و ٥ أمتار على التناظر والمطلوب ايجاد حجمه ومساحة سطحه المنحنى

(٣١) المطلوب ايجاد حجم المخروط التام فى المسألة السابقة

(٣٢) المطلوب ايجاد مساحة السطح المنحنى لكرة حجمها ١٢٠ مترا مكعبا

(٣٣) اذا كان ثمن الألف طوبة من الطوب الأحمر الذى مقاسه ٠,٢٤ متر × ٠,١٢٠ متر فى ٠,٠٥ متر يساوى ١٢٠ قرشا فما ثمن الطوب الداخل فى حائط طولها ٤٠ مترا وسمكها ٠,٣٦٠ متر وارتفاعها ٢,٤٠ متر

(٣٤) المطلوب ايجاد حجم هرم مثلثى ارتفـاعه ٣,٦٠ أمتـار وأضلاع قاعدته هى على التناظر ٠,٩٠ متر ٦ ١,٢٠ متر ٦ ١,٥٠ متر

(٣٥) المطلوب ايجاد سطح عوّامة مجوّفة من الحديد مكوّنة من مخروط ونصف كرة اذا كان قطر الكرة ٠,٩٠ متر والارتفاع الكلى للعوّامة ١,٥٠ متر

(٣٦) المطلوب وضع قاعدة لحساب السطح المنحنى لمخروط قائم واقامة البرهان على ذلك

(٣٧) حقل على شكل شبه منحرف ضلعاه المتوازيان ١٠٠ متر ٦ ٢٤٠ مترا والبعد العمودى بينهما ١٥٠ مترا فما مساحة هذا الحقل

(٣٨) المطلوب ايجاد حجم مخروط ناقص قائم نصفا قطرى قاعدتيه هما على التناظر ٣,٦٠ أمتار ٦ ٢,٤٠ متر والبعد العمودى بينهما ٣ أمتار

(٣٩) المطلوب حساب السطح المنحنى للمخروط الناقص المذكور

(٤٠) ثقل ديسيمتر مكعب من الماء يبلغ كيلو جراما واحدا والوزن النوعى للزئبق ١٣,٦٠ فما ثقل الزئبق الذى تشتمل عليه كرة قطرها ٥ سنتيمترات

(٤١) ارتفاع مخروط ناقص قائم يساوى ١٧ سنتيمترا ونصفا قطرى قاعدتيه ٣½ ، ١٢ سنتيمترا والمطلوب ايجاد حجم المخروط التام ومساحة سطحه المنحنى

(٤٢) اذا كان ارتفاع المخروط القائم الناقص مساويا هـ ونصفا قطرى قاعدته نق ، نقَ فالمطلوب ايجاد نصف قطر القطاع (الموازى لقاعدتيه) الذى ينصف الحجم × وبيان أن بعد هذا القطاع عن القاعدة الكبرى هو

$$\frac{\text{هـ}}{\text{نق} - \text{نقَ}}\left[\text{نق} - \left(\frac{\text{نق}^{3} + \text{نقَ}^{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

(٤٣) المطلوب ايجاد مساحة سطح كرة نصف قطرها ٠,٨٠ مترا ووزن الماء المشتملة هى عليه اذا كان ثقل ديسيمتر مكعب من الماء يعادل كيلو جراما واحدا

(٤٤) مثلث قائم الزاوية أضلاعه ٥ سنتيمترات ، ١٢ سنتيمترا ، ١٣ سنتيمترا يدور حول وتره والمطلوب ايجاد الحجم المتولد من ذلك الدوران

(٤٥) المطلوب ايجاد سمك كرة مجوفة من الحديد قطرها الخارج ٠,٣٠ متر وثقلها يساوى ثقل كرة مساوية لها من الماء مع العلم بأن كثافة الحديد ٧,٨

(٤٦) المطلوب ايجاد حجم هرم قاعدته وأوجهه جميعها مثلثات متساوية الأضلاع طول كل ضلع من أضلاعها متر واحد

(٤٧) المطلوب ايجاد حجم خابور قاعدته مستطيل ٠,٠٥ متر × ٠,١٠ متر وطول ضلعه الأعلى يساوى ٠,٠٨ متر وارتفاع الخابور ٠,٢٢ متر

(٤٨) اذا كانت مساحة السطح المنحنى لمخروط ١٨ مترا مربعا وسطح قاعدته ستة أمتار مربعة فما حجمه

(٤٩) نصف قطر أسطوانة يساوى ى + س وارتفاعها هـ ونصف قطر أسطوانة أخرى يساوى ى وارتفاعها هـ + س والاسطوانتان متساويتا الحجم فالمطلوب اثبات أن س = ى (ى — ٢ هـ) ÷ هـ

(٥٠) المطلوب ايجاد مساحة قطعة دائرية محصورة فى زاوية مركزية قدرها ½ ٣٢° ونصف قطر الدائرة ٢٤٠ مترا

(٥١) طريق عرضه ١٠ أمتار يحيط ببرج من الحشيش شكله دائرى قطره ٨٠ مترا فما الطريق بالفدان وكسوره

(٥٢) مخروط مجوفا ارتفاعه ٠,٠٥ متر ونصف قطر قاعدته ٠,٠٣ متر فما مقدار ثقل الزئبق الذى يمكن أن يشتمل عليه مع العلم بأن ثقل السنتيمتر المكعب من الزئبق يساوى ١٣,٦٠ جراما

(٥٣) مساحة دائرة عظيمة من الكرة تساوى متر مربعا فما حجم الكرة

(٥٤) المطلوب ايجاد مساحة السطح الكلى لمخروط ناقص نصفا قطريه الأعلى والأسفل ٤ سنتيمترات ، ٩ سنتيمترات وارتفاعه ١٢ سنتيمترا

(٥٥) المطلوب ايجاد (١) المساحة (٢) المحيط لقطعة دائرية نصف قطرها ١٠ أمتار وسهمها ٥ أمتار

(٥٦) هرم ارتفاعه ٠,٠٨٠ متر قاعدته مستطيلية ٠,٠٩ × ٠,١٠ متر قطع منه خابور ارتفاعه ٠,٠٤ متر بمستو مار بأحد الضلعين الطويلين من القاعدة والمطلوب ايجاد حجم الهرم والخابور

(٥٧) المطلوب ايجاد حجم خزان عمقه ٢٠ مترا ومساحة قاعدته العليا ٦٠ مترا × ٤٠ مترا وأضلاعه تميل الى الداخل بنسبة واحد أفقى الى اثنين رأسى

(٥٨) سهم قطعة كروية يساوى ٦ أمتار ومحيط قاعدتها ٢٠ مترا والمطلوب ايجاد السطح الكروى لتلك الكرة وحجمها

(٥٩) كرة مجوفة قطرها الخارج ١٤ر. متر وقطرها الداخل ١٢ر. متر أخذ من نهايتى قطر واحد قطعتان كرويتان سمك كل منهما سنتيمتر واحد والمطلوب ايجاد حجم الجسم الباقى وسطحه الخارجى المنحنى

(٦٠) ما كيفية تدريج كأس من الزجاج شكله على شكل مخروط مجوف بحيث يقاس به أعشار اللترات اذا كان طول الراسم الداخل ٢٠ سنتيمترا وحجمه الكلى لتر واحد

(٦١) المطلوب ايجاد مساحة شبه منحرف ا ب حـ ء ضلعاه ا ء ، ب حـ متوازيان وعلى بعد ٣٠ر. متر وطول الضلع ب حـ يزيد عن ا ء بقدر ٢٠ر. متر ومساحة المثلث ا ب حـ ١٠٠ر١ مترا مربعا

(٦٢) مستطيل عرضه ٦ سنتيمترات مرسوم فى نصف دائرة قطرها ١٢ سنتيمترا والمطلوب ايجاد مساحة المستطيل ومسائح الأجزاء الباقية من نصف الدائرة الخارجة عن المستطيل

(٦٣) مخروط ارتفاعه ١٨ سنتيمترا ونصف قطر قاعدته ٦ سنتيمترات موضوع على نصف كرة نصف قطرها هو نصف قطر قاعدة المخروط والمطلوب ايجاد حجم ذلك الجسم

(٦٤) قبة مجوفة شكلها على شكل قطعة كروية سهمها ٦ أمتار وقطر القاعدة ٨ أمتار والمطلوب ايجاد الحجم والسطح

(٦٥) المطلوب ايجاد حجم خابور بعد أحرفه المتوازية ٢٥ ، ٢٥ ، ١٤ سنتيمترا وأطوالها ١٢ سنتيمترا ، ١٦ سنتيمترا ، ٢٠ سنتيمترا على التناظر

(٦٦) المطلوب ايجاد حجم هرم ناقص قاعدتاه المتوازيتان مثلثان متشابهان مساحتهما ٥٠ ، ١٨ مترا مربعا على التناظر وارتفاع الهرم ٦ أمتار

(٦٧) اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها ١٥ سنتيمترا قطعت منها قطعة بمستو بعده الأصغر عن القاعدة ١٠ سنتيمترات وبعده الأكبر ١٦ سنتيمترا والمطلوب ايجاد حجم القطعة

(٦٨) المطلوب ايجاد مساحة السطح المنحنى لتلك القطعة

(٦٩) دائرة نصف قطرها ٥ أمتار أخذت نقطة على محيطها مثل و ورسم منها وتران متساويان و ا ، و ب طول كل منهما ٦ أمتار والمطلوب ايجاد الزاوية ا و ب وطول القوس ا و ب

(٧٠) قطعة مستطيلة من أرض عرضها ٣/٥ طولها محاطة بطريق عرضه ٣ أمتار وقد وجد أنه يلزم ١٠ أمتار مكعبة من الحصى لرصف الطريق بطبقة سمكها ٠,٠٥ متر والمطلوب ايجاد أبعاد تلك القطعة

(٧١) مثلث قائم الزاوية أضلاعه على التناظر ٣ ، ٤ ، ٥ أمتار قسم الى جزأين بعمود نازل من الزاوية القائمة على الوتر والمطلوب حساب مساحة المثلث الكلى والمثلثين الصغيرين

(٧٢) المطلوب ايجاد مساحة مخمس منتظم مرسوم فى دائرة نصف قطرها يساوى ٣٠٠ متر

(٧٣) المطلوب ايجاد حجم الكرة التى سطحها ٢٥٠٠ متر مسطح

(٧٤) المطلوب ايجاد الجزء المنظور من كرة نصف قطرها ٢٠ مترا اذا نظرت من نقطة على بعد ١٠ أمتار من سطحها

(٧٥) أسطوانة نصف قطر قاعدتهـا ٣٠ مترا مثقوبة ثقبا أسطوانيـا نصف قطره ٢٠ مترا مخترقا جميع طولهـا بحيث يكون محورا الأسـطوانتين متوازيين ومتباعدين بقـدر ٥ أمتار ثم قطع جزء من الأسطوانة بمستو مائل على مستوى القاعدة بقدر ٤٥° ويقطع المستوى المذكور فى خط يمس القاعدة فى نقطة ں مع العـلم بأن نصف قطر القاعدة المـار بنقطة ں مائل بزاوية قدرها ٦٠° على نصف القطر المار بمركز الثقب والمطلوب ايجاد حجم الجسم المقطوع بالمستوى

(٧٦) مربع مكوّن من امتداد الأضلاع المتبـادلة من مثمن منتظم ومربع آخر مكوّن من وصل نقط الزوايا المتبادلة من المثمن والمطلوب ايجاد النسبة بين مساحتى المربعين

(٧٧) المطلوب ايجاد مساحة المثلث الذى أضلاعه ٩٥ ، ١٠٠ ، ١٠٥ متر وايجاد نصف قطر الدائرة التى مساحتها تساوى مساحة هذا المثلث

(٧٨) هرم قاعدته مربعة وطول كل حرف من أحرفه المـائلة يساوى ٧٠٦ مترا وطول كل ضلع من أضلاع القاعدة ٥٤٤ $\sqrt{2}$ متر والمطلوب ايجاد حجم الهرم وزاوية ميل أحد أحرفه على القاعدة

(٧٩) مثمن مكوّن بوصل نهـايتى كل ضلع من أضلاع مربع معلوم الى منتصف الضلع المقابل له والمطلوب ايجـاد مساحة المثمن المذكور بفرض أن ضلع المربع يساوى ١٠ سنتيمترات .

(٨) المطـلوب ايجاد طول قوس دائرة طول وتره ١٠٠ مـتر والزاوية الواقعة بين المماسين من نهايتيه ٢٣° ٤َ

(٨١) الضلعان المتوازيان من شبه منحرف هما ١٥٠ مترا ، ١٠٠ متر على التنظر والزاويتان اللتـان على نهايتى الضـلع الأول ٤٥° ، ٦٠° والمطلوب ايجاد المساحة .

(٨٢) تمثال لملك من ملوك المصريين يزن ٥٠ طونولاته وهو مصنوع من مادة كثافتها أثقل من كثافة الجسم البشرى بقدر ٢٫٧ مرة فاذا كانت جثة انسان طوله ١٧٦ سنتيمترا ومشابهة للجسم المذكور يبلغ ثقلها ٦٣ كيلوجراما فما طول التمثال

(٨٣) قاعدة خزان على شكل مستطيل أنقى ٦٠ مترا × ٤٠ مترا وميل جوانبه بمقدار واحد أفقى الى اثنين رأسى فاذا كان فيه ماء عمقه عشرون مترا فما حجم ذلك الماء

(٨٤) أضلاع مثلث تساوى ٩٢٣ مترا ، ١٠٧٥ مترا ، ١٢٣٤ مترا والمطلوب حساب (١) نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (٢) طول أحد أضلاع المثلث المشابه للثلث السابق والمرسوم داخل الدائرة

(٨٥) المطلوب ايجاد مساحة مخمس منتظم مرسوم على دائرة نصف قطرها ٢٠٠ متر ومساحة المثلث المكوّن بوصل احدى زوايا المخمس الى زاويتين غير مجاورتين لها

(٨٦) المطلوب ايجاد حجم كرة نصف قطرها ١٠٠ متر وحجم القطعة الصغرى التى تتكوّن بمستو منصف لنصف القطر بالتعامد وما حجم القطعة المأخوذة بنفس الكيفية من كرة أخرى نصف قطرها ٣٠ مترا

(٨٧) الأحرف الثلاثة المتوازية من خابور أطوالها ٧٠ مترا ، ١١٠ متر ، ١٢٠ مترا وحجم الخابور ٩٠٫٠٠٠ متر مكعب والمطلوب ايجاد مساحة قطاعه العرضى المأخوذة بالتعامد على هذه الأحرف المتوازية واذا كانت الأحرف هى ا ب ، حـ ى ، ے ف فالمطلوب ايجاد حجم الهرم الذى رأسه فى نقط ا وقاعدته الشكل الرباعى حـ ى ف ے

(٨٨) المطلوب ايجـاد حجم مخروط ناقص نصفا قطرى قاعدتيـه ٢ متر ، ٣ أمتار على التناظر وارتفاع المخروط ٧ أمتار .

(٨٩) ا ب حـ هو مثلث قسم منه الضلع ا ب الى ثلاثة أقسام متساوية بنقطتى ى ، ك وأطوال الأضلاع ا ب ، ب حـ ، حـ ا هى على التناظر ٦٤ ، ٨٥ ، ٥٣ مترا والمطلوب ايجاد مسائح الأجزاء التى ينقسم اليها المثلث بخطين مارين من ى ، ك موازيين الى ب حـ

(٩٠) المطلوب ايجاد حجم كرة مقربا الى سـنتيمتر واحد اذا كان محيط دائرة عظيمة فيها مساويا ٣,٨٦٢ أمتار

(٩١) عشرون كتلة من الخشب الاسطوانى طول كل واحدة منهـا ٢ أمتار وقطر كل قطعة ٤٥ سنتيمترا يراد نشرها الى قطع بحيث يكون سمك كل قطعـة بعد النشر ٠,٠٧٥ متر وأن يكون بعد أول خط وآخر خط من خطوط النشر عن خارج المحيط يساوى ٣,٧٥ سـنتيمتر والمطلوب ايجـاد تكاليف النشر اذا كانت أجرة نشر المتر المربع الواحد ٢٥ ملليما

(٩٢) مضلع منتظم ذو خمسة أضلاع مرسوم على دائرة نصـف قطرها ٥ أمتار والمطلوب ايجاد (١) الضلع مضبوطا لغـاية الرقم الاعشارى الثالث من لمتر ب المساحة

(٩٣) نصف قطر دائرة يساوى ١٠ أمتـار ووتر أحد أقواسها يساوى ٧ أمتار والمطلوب ايجاد وتر نصف القوس

(٩٤) الوزن النوعى لمـادة صنع منها صندوق مكعب الشكل يساوى ٨ وكل من جوانبه وقاعه وغطائه متساوية السمك وطول الضلع الخارج للصندوق ١,٢٥ متر وقد وجد أنه يزن بالضبط وزن مكعب مصمط مساو له فى الحجم ومن مادة وزنها النوعى يساوى واحدا والمطلوب ايجاد سمك الصندوق

(٩٥) طول نصف قطر دائرة = ٣ أمتار أخذ فيها وتر ا ب طوله يساوى مترين ورسم من نقطتى ا ، ب مماسان ا ء ، ب ء والمطلوب ايجاد ا ء + ء ب − ا ب مقربا الى ثلاثة أرقام أعشارية

(٩٦) و ا ، و ب ، و حـ هى أضلاع مكعب ورسم مستو مار بالنقط ا ، ب ، حـ والمطلوب حساب النسبة بين الجزأين اللذين ينقسم اليهما قطر المكعب المار بنقطة و

(٩٧) هرم منتظم قاعدته المربع ا ب حـ ء ورأسه نقطة ى طول كل ضلع من قاعدته ١٠ أمتار ونقطة ى تبعد عن القاعدة بقدر ١٥ مترا وقطع الهرم بمستو مار من نقطتى حـ ، ء وبنقطتى منتصف ى ا ، ى ب والمطلوب ايجاد حجمى الجزأين اللذين ينقسم اليهما الهرم المذكور

(٩٨) نصف قطر قطاع دائرى يساوى ٣ أمتار ومساحته جزء من ألف من المتر المربع فما عدد الثوانى التى تشتمل عليها زاويته

(٩٩) اذا علمت أضلاع شكل رباعى وزاوية من زواياه فالمطلوب بيان كيفية حساب مساحته

ولنفرض أن أضلاعه هى ا = ٢٦٠ ، ب = ٣١٠ ، حـ = ٢١٠ ، ء = ٣٣٠ مترا وأن الزاوية التى بين ا ، ب = ٦٠° والمطلوب حساب المساحة بالمتر المربع

(١٠٠) المطلوب ايجاد النسبة بين مساحة المربع المرسوم فى دائرة وبين مساحة المربع الذى ضلعه يساوى ربع محيط تلك الدائرة

واذا فرض أن نق = ١٠ أمتار فالمطلوب حساب الفرق بين مساحتى المربعين مقربا الى سنتيمتر مربع

(١٠١) اذا انطبق محور اسطوانة على محور مخروط وكانا متساويين في الحجم فالمطلوب حساب النسبة بين جزء الاسطوانة الخارج عن المخروط الى الحجم الكلى للأسطوانة

(١٠٢) زاوية من زوايا متوازى أضلاع تساوى ٣٠° والنسبة بين الضلعين المحيطين بالزاوية كنسبة ٣ الى ٤ والمساحة ١٧٣٤ مترا مربعا والمطلوب ايجاد الأضلاع

(١٠٣) ا ، ب ، حـ ، ء ، ـــ ، ف هى على الترتيب رؤوس زوايا مسدّس منتظم مرسوم فى دائرة فاذا جعلت نقطة ء مركزا وبنصف قطر ء ب رسمت دائرة فالمطلوب ايجاد مساحة الجزء من الدائرة الأولى الخارج عن الدائرة الثانية واذا كان نصف قطر الدائرة الأولى ١٠ أمتار فالمطلوب ايجاد هذه المساحة مقربة الى سنتيمتر مربع واحد

(١٠٤) اذا كانت نقطة ا رأس زاوية من مكعب وأخذت على الأضلاع التى تتقابل فى هذه الزاوية ثلاث نقط و ، ک ، ر بحيث تكون الأطوال او ، اک ، ار متساوية وكان حجم الهرم ا و ک ر يساوى $\frac{١}{٤٨}$ من حجم المكعب فالمطلوب بيان أن نسبة مساحة المثلث و ک ر الى مساحة أحد أوجه المكعب كنسبة $\sqrt{٣}$ الى ٨

(١٠٥) مساحة مثلث تساوى ربع المربع المنشأ على ضلعين من أضلاعه حـ ، ب والمطلوب البرهنة على أن الضلع الثالث يلزم أن يساوى أحد مقدارين يرمز لهما بالرمزين $حـ_١$ ، $حـ_٢$ ثم بيان ان

$$حـ_١ حـ_٢ = \sqrt{أ^٤ - أ^٢ ب^٢ + ب^٤}$$

(١٠٦) معلوم من المثلث ا ب حـ الضلع ا = ١٢٣٥ مترا ، بَ = ٣٠ً ١٠َ ٢٤° ، حَ = ٣٠ً ٣٢َ ٥٤° والمطلوب حساب طول ب ، حـ ونسبة نصف قطر الدائرة الداخلة الى نصف قطر الدائرة التى تمس الضلع ا وامتداد الضلعين ب ، حـ .

(١٠٧) رسم مماس من نقطة ا لدائرة نصف قطرها ٦ سنتيمترات وأخذت نقطة مثل ى على المماس بعيدة عن ا بقدر ثمانية سنتيمترات والمطلوب ايجاد بعد نقطة ى عن أقرب نقطة لها من محيط الدائرة

(١٠٨) قسم سطح دائرة معلومة الى قسمين بقوس مثل ا ب مركزه نقطة م على محيط الدائرة المعلومة فاذا كان التقدير الدائرى للدائرة ا م ب = هـ فالمطلوب ايجاد مساحتى الجزأين وامتحان الحالة حينما تكون الزاوية ا م ب = ٢٠ً ١١َ ١٠٩°

(١٠٩) المطلوب ايجاد حجم الماء الذى يملأ حوضا طوله ٦ أمتار وعرضه متران وعمقه ٣ أمتار وقطاع الحوض قطع مكافئ

(١١٠) المطلوب ايجاد حجم عوّامة مصنوعة من القطعة الكبرى من كرة ومخروط قائم مماس للكرة فى محل الاتصال بفرض أن الطول الأكبر للعوّامة = ا + ب وقطر الكرة يساوى ٢ ا

(١١١) المطلوب ايجاد مساحة قطعة من قطع مكافئ محددة بوتر عمودى على المحور بفرض أن طول الوتر يساوى ستة أمتار و بعده عن الرأس يساوى ٣ أمتار ثم اذا دارت القطعة المذكورة حول محورها فالمطلوب ايجاد حجم الجسم المتولد

(١١٢) المطلوب ايجاد مقدار الزاوية التى رأسها فى مركز الجسم ذى الأربعة الأوجه الثلاثية المنتظم والمقابلة لأحد أحرفه

(١١٣) اذا كان مخروط ناقص مرسوما على كرة فالمطلوب اثبات أن نصف قطر الكرة وسط متناسب بين نصفى قطرى المخروط الناقص

(١١٤) المطلوب ايجاد الحجم والسطح المنحنى للمخروط الناقص السابق ذكره اذا كان نصفا القطرين ٣ أمتار ، ٦ أمتار على التناظر

(١١٥) المطلوب البرهنة على أن القطاع الواقع فى وسط ارتفاع مخروط ناقص نصفا قطرى قاعدتيه س ، سَ والقطاع المتوسط هما على التناظر أقل من المتوسط الحسابى للقاعدتين بمقدار مساحة القطاع الواقع فى وسط كرة قطرها يساوى الفرق بين س ، سَ والقطاع المتوسط لها

(١١٦) ثقب فى كرة ثقب اسطوانى مارّ بمركزها بحيث يشغل هذا الثقب نصف حجمها والمطلوب ايجاد النسبة بين قطر الثقب وقطر الكرة

(١١٧) مثلث معلوم فيه أن ا = ٢٥٠ ، ب = ٢٤٠ ، اَ = ٤٨ً ٤َ ٧٢°
والمطلوب ايجاد مقدار الزاويتين بَ ، حَ وبيان ما اذا كان يمكن أن يكون لكل منهما أكثر من مقدار واحد

(١١٨) خزان ماء طوله ٦ أمتار وعرضه ٥ أمتار ويسع ٥٠٤٠٠ طوبة أبعاد كل منها ٠,٢٢٥ مترا طولا ، ٠,٠٧٥ مترا سمكا ، ٠,١٠ مترا عرضا فما مقدار ما يسعه من الماء بالمتر المكعب

(١١٩) خزان مكشوف أبعاده الخارجية ٦ أمتار طولا وخمسة أمتار عرضا وعمقه ٢,١٠ متر بنى أرضه وجوانبه بالطوب لسمك ٠,٣٠ مترا وملىء ماء والمطلوب ايجاد ثقل الخزان ومحتوياته اذا كان البناء بالطوب يزيد عن ثقل حجم مساوله من الماء بقدر النصف

(١٢٠) طول ضلعى مثلث يساوى مترا واحدا و $\sqrt{2}$ متر على التناظر والزاوية المقابلة للضلع الأصغر تساوى ٣٠° والمطلوب البرهنة على أن هناك مثلثين بهذه الصفة وايجاد زواياهما وبيان أن نسبة مساحة أحدهما الى الآخر كنسبة $\sqrt{3} + 1 : \sqrt{3} - 1$

(١٢١) المطلوب ايجاد ثقل صندوق ذى غطاء مصنوع من الخشب سمكه ٠,٠١٨ متر وأبعاده الخارجية ١,٢٠ متر × ٠,٩٠ متر × ٠,٩٠ متر مع العلم بأن ثقل المتر المكعب من الخشب يساوى ٦١٥ كيلوجراما

(١٢٢) حلقة قطرها ٠,٢٥ متر معلقة من نقطة ارتفاعها عن مركزها ٠,٣٠ متر بواسطة ستة خيوط متساوية الطول مربوطة فى محيطها على أبعاد متساوية من بعضها والمطلوب ايجاد جيب تمام الزاوية المحصورة بين خيطين متجاورين

(١٢٣) المطلوب ايجاد مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه د مرسوم داخل دائرة نصف قطرها معلوم ثم اذا كان محيط مخمس منتظم يساوى محيط مضلع منتظم آخر ذى عشرة أضلاع فالمطلوب اثبات أن النسبة بين مساحتهما كنسبة ٢ : $\sqrt{5}$

(١٢٤) المطلوب معرفة عدد الجالونات التى يحتوى عليها وعاء اسطوانى قطره ٦ أقدام وارتفاعه ٧ أقدام مع العلم بأن الجالون يساوى ٢٧٧,٢ بوصة مكعبة وباعتبار أن ط = $\frac{22}{7}$

(١٢٥) حوّل ٣ أميال و٧ فارلونج و ١٢ قصبة انكليزية الى أمتار

(١٢٦) قطعة أرض مسوّرة مستطيلة مساحتها نصف فدان مصرى ومحيطها ٢٠٠ متر والمطلوب ايجاد طول كل ضلع من أضلاعها

(١٢٧) صندوق من خشب أوجهه مستطيلات يسع بالضبط ٦ كرات حديدية قطر كل منها ٠,٢٥ متر موضوعة فى النشارة فى صفين وسمك الخشب ٠,٠٢٥ متر والمطلوب ايجاد وزن الصندوق بما فيه مع العلم بأن المتر المكعب من الخشب أو النشارة يزن ٦١٥ كيلوجراما والمتر المكعب من الحديد يزن ٧٨٠٠ كيلوجرام

(١٢٨) المطلوب ايجاد قطر خزان غاز على شكل اسطوانة يسع ٣٠٠,٠٠٠ متر مكعب من الغاز بفرض أن الارتفاع يساوى القطر والمطلوب ايجاد الوزن بالطن للالواح الحديدية اللازمة لبناء هذا الخزان اذا كان القدم المربع منها يزن ١٠ كيلوجرامات بفرض أن القاعدة السفلى ستبقى مفتوحة والقاعدة العليا مسدودة ومستوية

(١٢٩) المطلوب ايجاد مكعب جسر بالأمتار المكعبة قاعدته أفقية مستطيلة طولها ٢٠ مترا وعرضها ٦ أمتار وأوجه الجسر الأربعة صاعدة بميل الى أن تتقابل وزوايا ميل تلك الأوجه على الأفق تساوى °٤٠

(١٣٠) اذا فرض أنه قد ضم الى قطعة أرض مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ مترا قطعتان مستديرتان فى الطرفين مركز كل منهما هى نقطة تقاطع قطرى المربع فما مسطح تلك الأرض المضافة

(١٣١) عوّامة مكوّنة من أسطوانة مجوّفة طولها ٦ أمتار ونهايتاها انصاف كرات مجوّفة مصنوعة من معدن سمكه ٣ ملليمترات وقطرها الخارج متر واحد والمطلوب ايجاد ثقلها مع العلم بأن ثقل المتر المكعب من المعدن ٧٨٠٠ كيلوجرام

(١٣٢) اناء على شكل أسطوانة مجوفة مفتوحة من أعلى وارتفاعها ضعف قطرها موضوعة على سطح أفقى ومملوءة بالماء ثم أخذ مخروط مساو

للاناء فى القاعدة والارتفاع وأدخل فى الماء الى أن وصل رأسه الى قاعدة الاناء ثم أخرج والمطلوب ايجاد ارتفاع الماء فى الأسطوانة بعد ذلك

(١٣٣) اذا أخذت كرة قطرها قريب جدا من قطر الأسطوانة المذكورة فى المسألة السابقة وأدخلت بعد ما سبق ذكره فى الاناء وحفظت بحيث تبقى مغمورة غمرا تاما فالمطلوب ايجاد الارتفاع الذى يصل اليه الماء حين غمرها

(١٣٤) المطلوب وضع قانون لحساب السطح المنحنى لكرة والسطح المنحنى لأسطوانة مستديرة قائمة والسطح المنحنى لمخروط مستدير قائم

(١٣٥) ما عدد الأمتار المربعة من القماش اللازم لانشاء خيمة مخروطية الشكل ارتفاعها ٣ أمتار بحيث يتيسر للرجل الذى يبلغ طول قامته ١,٨٣ مترا أن يقف معتدل القامة فى دائرة نصف قطرها ٠,٦٠ متر من المركز

(١٣٦) اناء سعته پنت على شكل مخروط دائرى ناقص ارتفاعه من الداخل ٤ ½ بوصات وقطر قاعدته كذلك ٣ ½ بوصات والمطلوب ايجاد قطر القاعدة العليا بفرض أن الجالون من الماء يزن ١٠ أرطال والقدم المكعب من الماء يزن ١٠٠٠ أوقية ثم المطلوب أيضا ايجاد ابعاد اناء سعته كوارت وشكله مشابه للشكل السابق

(١٣٧) معلوم من الشكل الرباعى ا ب حـ ى طول ا ب = ١٨٤٠ مترا ، ب حـ = ٢٤٢٠ مترا والزاويتان ا ب حـ ، ا حـ ى قائمتان ومساحة الشكل تعادل ٩٧٢ فدانا مصريا فما مقدار البعدين حـ ى ، ى ا

(١٣٨) دائرة مرسومة على مسدس منتظم ومسدس آخر مرسوم على الدائرة والفرق بين مساحة المسدسين تساوى $8\sqrt{3}$ سنتيمترات مربعة والمطلوب ايجاد مساحة الدائرة

(١٣٩) قطع ناقص مساحته تساوى ط × ٢٢٫٨٢٧ سنتيمترا ومحوره الأكبر يساوى ١٤ سنتيمترا فما طول محوره الأصغر

(١٤٠) المحيط الخارج لحلقة دائرية يزيد خمسة سنتيمترات عن المحيط الداخل لها فاذا كان نصف القطر الداخل يساوى ٧ سنتيمترات فما المساحة المحصورة بين المحيطين

(١٤١) قطعة مكعبة من الحجر ضلعها ١٢ سنتيمترا موضوعة على الأرض وفوقها اسطوانة قاعدتها تمس الأضلاع الأربعة للوجه العلوى للمكعب وارتفاع الاسطوانة المذكوره يساوى ١٧٫٥ سنتيمترا وجميع السطح مصقول ما عدا الأجزاء غير المنظورة فما مساحة السطح المصقول

(١٤٢) كتلة من الحديد زنتها ٧ طونولاتات يراد سحبها سلكا قطاعه العرضى ١٫٦٥ سنتيمتر مربع فما طول ذلك السلك اذا كان الديسيمتر المكعب من الحديد يزن ٧٫٨ كيلو جرامات

(١٤٣) اذا كانت مساحة السطح الخارجى لقنبلة كروية يساوى ٢٢٧٥ سنتيمترا مربعا ومساحة سطحها الداخل تساوى ٩٦٢ سنتيمترا مربعا فما حجم تلك القنبلة وما سمكها

(١٤٤) منشور قائم ارتفاعه ٢٠ سنتيمترا يرتكز على قاعدة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ضلعه ٠٫٠٧٥ مترا فما حجم هذا المنشور

(١٤٥) المطلوب تحويل ١٣٩٢٫٧ قدما مربعا الى أمتار مربعة بحيث يشتمل الخارج على أربعة أقدام

(١٤٦) قطعة أرض مربعة طول ضلعها ٢٠٠ متر داخلها طريق مستدير قطره يساوى ضلع المربع ومساحته ٥٩٦٦ مترا مربعا فما عرض الطريق المذكور

(١٤٧) حوض على شكل نصف كرة قطره الداخل ٢٥ سنتيمترا مغطى من الداخل بطبقة من الشمع ذات سمك منتظم بحيث أنه اذا صب فيه ماء حار حرارة كافية لاذابة الشمع ولملء الحوض فان الشمع يعوم بطبقة سمكها منتظم و يساوى ٠٫٠٢٥ متر والمطلوب ايجاد السمك الأصلى لطبقة الشمع

(١٤٨) حوض على شكل منشور قاعدتاه مثلثان متساو يا الأضلاع وطول وعرض القاعدة من أعلى يساو يان ٣٠ سنيتمترا وخمسة سنتيمترات على التناظر والمطلوب ايجاد حجم مافيه من الماء

(١٤٩) مخروط ناقص قطر قاعدتيه ٥ سنتيمترات و ٢ سنتيمتر و يشتمل على كرة تمس قاعدتى المخروط وسطحه الداخلى فما حجم هذا المخروط الناقص

(١٥٠) قطعة أرض على شكل مثلث متساوى الأضلاع كسيت بالرخام بسعر المتر المربع الواحد ٦٥٠ ملليما وأنشىء حولها سور بسعر المتر الطولى ٣٦٥ ملليما وفرض أن نفقة الرخام ستة أمثال نفقة السور فما طول ضلع المثلث

(١٥١) حوض طوله ١٫٦٠ متر وعرضه ٠٫٩٥ متر ملئ بالماء الى ارتفاع قدره ٠٫١٨ متر فما ارتفاع كمية من الماء مساوية لهذا الماء فى اسطوانة نصف قطرها ٠٫٤٥ متر

(١٥٢) مخروط مجوّف مصنوع من الصلب نصفا قطرى قاعدتيه الخارجة والداخلة هما ١٠ سنتيمترات و ٧٫٥ سنتيمترات على التناظر وارتفاع الرأس من الداخل ١٧٫٥ سنتيمترا فاذا ملئ المخروط بالرصاص الى ارتفاع أوطى من الرأس بقدر ٠٫١٠ متر وملئ الباقى بالبارود فالمطلوب ايجاد ثقل الصلب والرصاص والبارود اذا كان ثقل ٤ سنتيمترات مكعبة من الصلب يساوى سنتيمترين مكعبين من الرصاص تساوى ٣٠ سنتيمترا مكعبا من البارود وكثافة الصلب ٧٫٨

(١٦٣) المطلوب ايجاد القطر التقريبي لكرة من الخشب حجمها يساوى حجم شجرة خشبها من نوع الخشب نفسه وطولها ٥,٢٠ أمتار ومحيطها فى المواضع المختلفة بما فيها الطرفان وعلى مسافات متساوية يساوى ٢,٩٠ متر ، ٢,٥٠ متر ، ٢,٠٠ متر ، ١,٥٠ متر ، ١,٢٠ متر على التناظر

(١٥٤) رسم مسدّس منتظم فى دائرة معلومة ثم رسم فى ذلك المسدس دائرة ثم فى الدائرة مسدّس وهكذا الى غير نهاية والمطلوب ايجاد المتسلسلة التى تعين المسائح المحصورة بين كل دائرة ومسدّس وبيان أن مجموعها قريب من مساحة الدائرة السابقة

(١٥٥) كرة من الرصاص قطرها ٠,١٠ متر مغطاة بالذهب والمطلوب ايجاد سمك طبقة الذهب (١) اذا كان حجم الذهب يساوى حجم الرصاص (٢) اذا كان سطح الذهب ضعف سطح الرصاص

(١٥٦) اذا قسم مخروط قائم ذو قاعدة مستديرة الى ثلاثة أجزاء بمستويين موازيين لقاعدته متساويى البعد عن القاعدة والرأس فالمطلوب مقارنة الأجزاء الثلاثة التى انقسم اليها المخروط

(١٥٧) اذا كان عندنا ست أنابيب من الحديد وكان القطاع العرضى لأى واحدة منها مربعا وكوّن منها حلقة على شكل مسدّس وملئت ماء وكانت مساحة القطاع العرضى للماء ١٠٠ سنتيمتر مربع والبعد بين كل زاويتين داخلتين متقابلتين يساوى مترا واحدا فالمطلوب ايجاد مساحة السطح الكلى للمواسير وحجمها الكلى بصرف النظر عن سمك المواسير

(١٥٨) برج اسطوانى قطره ثمانية أمتار وارتفاعه عشرة أمتار مغطى بطبقة كروية مقطوع منها جزء من أعلاها وبنى فوق الفتحة التى فى القبة منور قطره ٢,٤٠ متر وارتفاعه ٣ أمتار ثم غطيت بسطح مستو فالمطلوب ايجاد السطح الكلى الخارجى للمبنى

(١٥٩) قرص من الورق المقوى قطره متر واحد قسم الى ستة قطاعات متساوية بخطوط مارة بالمركز ورسم فى كل قطاع دائرة تمس نصفى القطرين المحددين للقطاع وتمس أيضا قوس الدائرة المار بنهايتى نصفى القطرين فى وسط القوس المذكور — فاذا قطعت تلك الدوائر وحذفت من القطاعات فالمطلوب ايجاد مساحة الباقى من المقوّى

(١٦٠) مخروط مجوّف من الورق زاوية رأسه ٦٠° أمسك بحيث تكون رأسه الى أسفل ووضعت فيه كرة نصف قطرها ٠,٠٥ متر ثم قطع جزء المخروط المتباعد عن الرأس من محل تماس الورق بالكرة والمطلوب ايجاد سطح الجسم الباقى بعد ذلك

(١٦١) منشور قائم مجوّف موضوع على قاعدة مكوّنة من مثلث متساوى الأضلاع والأوجه الرأسية للنشور عبارة عن مربعات فاذا كان ضلع كل مربع يساوى مترا واحدا ثم ملىء المخروط بالماء وغمر فيه أكبر كرة يمكن غمرها فيه فالمطلوب ايجاد مقدار الماء الباقى فى المنشور

(١٦٢) صالة طولها ثلاثة أمثال عرضها وتكاليف بياض سقفها هى ٥٠٠ مليما و ٤ جنيهات بفرض أن قيمة بياض المتر الواحد ٢٥ مليما ونفقة إلصاق الورق على حوائطها الأربع تبلغ ٣٥ جنيها بفرض أن المتر المسطح يتكلف ٩٥ مليما والمطلوب ايجاد ارتفاع الصالة

(١٦٣) مكعب من الرخام ضلعه يساوى مترا واحدا شطفت زواياه وصقلت جيدا بحيث يكون كل وجه جديد على شكل مثلث متساوى الأضلاع بينما صارت الأوجه الأصلية للمكعب مربعات ثانيا والمطلوب ايجاد مساحة الجسم الباقى بالتقريب

(١٦٤) اناء على شكل نصف كرة نصف قطره الداخلي متر واحد ملء ماء ووضع على تختة أفقية ثم وضع فيه مخروط وضعا رأسيا بحيث تكون رأس المخروط مماسة لمركز قاعدة الاناء فاذا كانت زاوية رأس المخروط تساوى ٩٠° فالمطلوب ايجاد مقدار الماء الباقي فى الاناء بعد ادخال المخروط الى وضعه الجديد

(١٦٥) اذا كان محيط مثلث قائم الزاوية يساوى ١٥ مترا وكان الوتر يزيد عن أحد الأضلاع بقدر ٢,٥ مترا فالمطلوب ايجاد الاضلاع الثلاثة

(١٦٦) المطلوب ايجاد مساحة قطعة أرض مثلثية الشكل ا ب حـ اذا كانت قد قيست الأبعاد الآتية على خريطة مقياسها $\frac{١}{٢٥٠٠}$ فوجد ا حـ = ٤,١ سنتيمترات والعمود من ب على الخط ا حـ = ١,٥٩ سنتيمتر والمطلوب أيضا ايجاد المساحة بقياس الأضلاع الثلاثة اذا كان ا ب = ٣,٣ سنتيمترات ، ب حـ = ٢ سنتيمتر ثم بيان المتوسط بين المساحتين بالفدان

(١٦٧) بئر قطرها ١,٥٠ متر وعمقها ١٠ أمتار يراد بناؤها بطوب متلاصق بغير مونة بسمك ٠,٢٢٥ متر فما هو الثقل التقريبي للطوب اللازم اذا كان ثقل الطوبة التى مقاسها ٠,٢٢٥ متر × ٠,١١ متر × ٠,٠٥ متر يساوى ٢ كيلو جرام

(١٦٨) قنبلة مجوفة قطرها ٣٠ سنتيمترا وضعت فى اناء مخروطى زاوية رأسه ٦٠° وصب ماء الى أن ملأها وغطاها ثم فرغت تلك الكرة مما فيها من الماء وأخرجت من الاناء ووضع عوضا عنها كرة أخرى مصمتة مساوية لها فى القطر فارتفع الماء بقدر ٠,٠١٢٥ متر فوقها والمطلوب حساب سمك الكرة المجوفة بالتقريب

(١٦٩) المطلوب عمل رسم كروكى وحساب مساحة قطعة أرض شكلها ب ے ح ف ى ه مع معرفة ما يأتى

	متراً	
	الى ح	
	٢٠٤	
	١٩٨	الى ف ٩٤
١٠ الى ے	١٢٢	
	١١٧	الى ى ٦٤
	٨٨	الى ه ١٤
٧٠ الى ب	٦٣	
	من ا	

(١٧٠) هرم ناقص قاعدتاه مستطيلتان ضلعا قاعدته ٢٥ مترا و٣٦ مترا فاذا كان ارتفاع الهرم الناقص المذكور ٦٠ مترا وحجمه ٥٠٤٨٠ مترا مكعبا فالمطلوب ايجاد مساحة قاعدته الأخرى

(١٧١) المطلوب ايجاد نصف قطر الكرة التى حجمها يساوى حجم الهرم الناقص السابق الذكر بحيث يشتمل الناتج على رقمين أعشاريين مضبوطين.

(١٧٢) المطلوب ايجاد ثمن القماش اللازم لعمل خيمة مخروطية قطرها ٣,٦٠ أمتار وارتفاعها ٢,٤٠ متر اذا كان ثمن المتر الواحد ١٨٥ ملليما وعرض القماش ٠,٦٠ متر

(١٧٣) حديقة عمومية مساحتها فدانان وهى على شكل مربع فاذا كان فيها طريق محيط بها من الداخل ومساحته $\frac{1}{8}$ فدان فما عرضه

(١٧٤) صندوق على شكل مكعب عمقه ١,٥٠ متر ملئ بطبقات من الكرات قطر كل منهما ٠,١٢٥ متر بحيث تكون أقطار تماس تلك الكرات أفقية ورأسية فما مقدار حجم الجزء الخالى من الصندوق بين تلك الكرات

(١٧٥) مسجد مشتمل على منارتين وقبة وكل منارة يتكون جزؤها الأعلى من هرم ارتفاعه ٢٠ مترا موضوع على قاعدة مربعة ضلعها ٦ أمتار والقبة على شكل نصف كرة نصف قطرها ١٢ مترا والمطلوب ايجاد نفقة دهان ذلك بالزيت اذا كان المتر المسطح الواحد يتكلف ٤٠ ملليما

(١٧٦) قطعة العملة الانكليزية المعروفة بنصف بنس قطرها بوصة واحدة فما مقدار المساحة المحدودة بست قطع من هذه العملة أذا وضعت بحيث تمس كل قطعة قطعتين وبحيث تكون مراكزها جميعا على محيط دائرة

(١٧٧) قرص مستدير من الرصاص سمكه ٠,٠٧٥ متر وقطره ٠,٣٠ مترا صنع جميعه خردقا متماثل الكثافة نصف قطره = ١,٢٥ ملليمتر فما عدد الخردق الذى صنع

(١٧٨) اذا كانت صالة فى مبنى على شكل اسطوانى نصف قطرها ٥ أمتار وارتفاعها ٣,٦٠ أمتار ثم غطيت بمخروط زاوية رأسه زاوية قائمة فالمطلوب ايجاد مساحة السطح الداخل ثم الحجم المحصور فى المبنى المذكور

(١٧٩) ان قاعدة الهرم الأكبر بالجيزة مربع ضلعه ٢٣٠ مترا تقريبا وارتفاعه ١٤٠ مترا والمطلوب (أولا) حساب ثقله اذا كان ثقل المتر المكعب منه ٣ طونولاتات (ثانيا) طول الحائط التى يمكن بناؤها من مادة هذا الهرم اذا كان ارتفاعها ١,٥٠ متر وسمكها ٠,٤٥ متر

(١٨٠) كرة نصف قطرها ١٥,٠ متر ثقبت ثقبا مخروطيا رأسه فى مركز الكرة فاذا كانت قاعدة الثقب تحذف من سطح الكرة ٠٣١٢,٠ متر مربع فما حجم ما يبقى من الكرة

(١٨١) مثلث متساوى الأضلاع مساحته ١٧٣٢,٠٥ مترا مربعا جعلت رؤوسه مراكز ورسمت دوائر أنصاف أقطارها مساوية لأنصاف أضلاع المثلث فالمطلوب ايجاد المساحة المحصورة بين الدوائر الثلاث .

(١٨٢) مخروط مجوّف طول راسمه ضعف نصف قطر قاعدته وضع بحيث يكون محوره رأسيا ورأسه الى أسفل وملئ ملأ تاما بالماء ثم أخذت كرة كثافتها أكبر من كثافة الماء وأدخلت فيه تدريجيا فوجد أنها عندما تستقر على الأضلاع الداخلة للمخروط تكون قد غمرت فى الماء غمرا تاما فقط والمطلوب ايجاد كمية الماء التى تزيلها الكرة ثم ايجاد المقدار المحصور بين الكرة ورأس المخروط بفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط تساوى ٠٥,٠ مترا

(١٨٣) منشور قائم قاعدته مثلث وكل ضلع من أضلاعه يساوى ٥٣,٠ مترا رسمت داخله كرة فمست كل وجه من أوجهه الخمسة والمطلوب ايجاد حجم الكرة ومقدار الفضاء الواقع بينها و بين أوجه المنشور

(١٨٤) المطلوب حساب تكاليف تبليط ميدان مستدير قطره ٢٥ مترا بفرض أن قيمة تبليط المتر المربع مائتا ملليم وبفرض ترك فضاء فى مركز الميدان لانشاء فسقية على شكل مسدّس منتظم طول كل ضلع من أضلاعه متر واحد

(١٨٥) المطلوب البرهنة على أن مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب مجموع الضلعين المتوازيين فى طول العمود عليهما المحصور بينهما.

(١٨٦) حقل على شكل شبه منحرف مساحته $\frac{1}{2}$ ٤ أفدنة والمسافة بين الخطين المتوازيين مقيسة على الخط العمودى عليهما تساوى ١٢٠ مترا وأحد الضلعين المتوازيين يساوى ٢٠٠ متر فما طول الضلع الثانى

(١٨٧) المطلوب بيان حجم المخروط بدلالة نصف قطر قاعدته وارتفاعه

(١٨٨) اذا كان قطرا قاعدتى مخروط ناقص ١٥,٠٠ متر ، ١٠,٠٠ متر وكان حجم هذا المخروط الناقص يساوى ٣١٣٥ سنتيمترا مكعبا فالمطلوب ايجاد ارتفاع المخروط

(١٨٩) حقل مخمس ا ب حـ ى ـــ الطول ا حـ يساوى ٥٠ مترا والأعمدة من ب ، ى ، ـــ على ا حـ تساوى ١٠ ، ٢٠ ، ١٥ مترا والبعد بين نقطة ا وبين مواقع الأعمدة من ى ، ـــ تساوى ٤٠ مترا ، ١٠ أمتار والمطلوب ايجاد المساحة

(١٩٠) كرة نصف قطرها متر واحد موضوعة على طاولة فالمطلوب ايجاد حجم المخروط القائم المجوف الذى يمكن أن يغطيها بالضبط بفرض أن قطاع هذا المخروط المار بمحوره مثلث متساوى الأضلاع

(١٩١) المطلوب ايجاد مساحة المثلث الذى أضلاعه ١٣,٦ مترا ، ١٥,٠ ، ١٥,٤٠ مترا

(١٩٢) المطلوب أيضا ايجاد طول أحد الضلعين المتساويين من مثلث متساوى الساقين اذا كانت قاعدته ١٤ مترا ومساحته مساوية لمساحة المثلث المذكور فى المسألة السابقة (مقربا لغاية جزء من المليمتر)

(١٩٣) غرفة مستديرة مغطاة بسقف على شكل قبة نصف كروية مكعب فراغها ١٥٧,٠٨ مترا مكعبا والقطر الداخل للبناء مساو لارتفاع تاج القبة فوق الأرضية والمطلوب ايجاد الارتفاع

(١٩٤) ماسورتان احداهما من الرصاص والثانية من الزنك طولهما على التناظر ١,٢٥ ، ١,٥٦ مترا وهما متساويتان في القطر الداخل وقدره ٠,٠٢٥ متر والقطر الخارج للماسورة الرصاصية يساوى ٠,٠٣ متر فاذا كان الرصاص أثقل من الماء بقدر ١١ مرة والزنك أثقل منه ٧ مرات فما هو مقدار القطر الخارج لماسورة الزنك اذا كان ثقل الماسورتين واحدا

(١٩٥) اذا فرض أن قطرة من الماء ذات شكل كروى قطره ٠,٠٠٢٥ متر فما هو الارتفاع الذى تصل اليه ٥٠٠ نقطة فى اناء مخروطى قطر قاعدته يساوى ارتفاعه

(١٩٦) مكعب من الرصاص حجمه ٠,٠٢٧ متر مكعب أخذ منه هرم قاعدته هى أحد أوجه المكعب ورأسه على الوجه المقابل فاذا أذيب الباقى من الرصاص وصب على شكل كرة فما قطر تلك الكرة

(١٩٧) المطلوب ايجاد نفقة رصف طريق طوله ٨٠٠ متر وعرضه ١٥ مترا اذا كانت قيمة رصف المتر المربع الواحد ٤٥٠ ملليما

(١٩٨) ترعة عرض قاعها ٤٠ مترا وعمقها ١٠,٥٠ أمتار وميل أجنابها ٤٥° فما هى النفقة الكلية لحفر مسافة طولها ١٠٠ متر بفرض أن نفقة حفر المتر الواحد تساوى ٧٥ ملليما

(١٩٩) اذا فرض فى المسألة السابقة أن نفقة رصف الأجناب بالحجر تبلغ ١١٠ ملليمات للمتر المربع فما هى المصاريف الاضافية بفرض أن الرصف يصل الى ارتفاع رأسى قدره ٨,١٠ أمتار

(٢٠٠) حوض مفتوح من أعلاه طوله ٦,١٥ أمتار وعرضه ٢,٢٠ مترا وعمقه ١,١٠ متر والمطلوب (١) ايجاد مسطح الرصاص اللازم لتبطينه تبطينا تاما (بصرف النظر عن الأجزاء التى تغطيها أجزاء أخرى) ، (٢) مقدار سعته باللتر .

(٢٠١) ماسورة من الحديد الزهر قطرها الداخل ٠,١٥ متر وسمك المعدن ٠,٠٢٥ متر والمطلوب حساب سطح المعدن الداخل فى القطاع العرضى للماسورة وثقل المتر الطولى منها

(٢٠٢) المطلوب حساب ثقل محور حركة آلة ميكانيكية مصنوع من الصلب اللين قطره ٠,٠٧٥ متر وطوله ٣ أمتار

(٢٠٣) اذا بطنت أسطوانة ببطانة من الصلب المصبوب وكان القطر الداخل ١,٠٥ متر والطول ١,٣٥ متر والسمك ٠,٠٣٢ متر فما ثقل تلك البطانة

(٢٠٤) ما نفقة دهان عقد نصف دائرى فتحته ٦ أمتار وطوله ٣,٦٠ أمتار وقيمة دهان المتر المربع الواحد ٩٠ ملليما

(٢٠٥) ما حجم الماء فى ماسورة طولها ٨٠٠ متر وقطرها ٠,٢٢ متر

(٢٠٦) صمام أمن مغلق بأثقال من الزهر عددها سبعة قطر كل منها ٠,٢٥ متر وسمكه ٠,٠٣٧٥ متر والمطلوب ايجاد الثقل الواقع على الصمام

(٢٠٧) اذا كان قطر صمام الأمن فى المسألة السابقة ٦,٢٥ سنتيمترات فما مقدار ضغط البخار على كل سنتيمتر مربع حينما يشرع البخار فى التصرف

(٢٠٨) صمام أمن فى قزان يشتغل على ضغط قدره ٧ كيلو جرامات على السنتيمتر المربع وقطر الصمام المذكور ٠,١٠ متر والمطلوب حساب الثقل اللازم لهذا الصمام ثم سمك الأثقال المصنوعة من الحديد الزهر التى قطر كل منها ٠,٣٠ متر وعددها عشرة لكى يكون ثقلها هو الثقل المطلوب

(٢٠٩) ما ثقل قزان أسطوانى من الصلب نهايتاه نصفا كرتين وقطره ٠,٩٠ متر وطوله ٦ أمتار وسمك الصاج الذى هو مصنوع منه ٠,٠١٠ متر

(٢١٠) ما حجم المـاء الذى يملاء القزان المذكور وما ثقل ذلك المـاء

(٢١١) طيـارة آلة بخارية مصـنوعة من حديد زهر عرض دائرها ٠,٢٢٥ متر والسمك المتوسط لذلك المحيط ٠,٠٣٧٥ متر فما هو ثقل محيطها اذا كان قطرها ١,٥٠ متر

(٢١٢) ما ثقل حلقة مصنوعة من حديد مطروق مستدير قطره ٠,٠٢٥ متر والقطر المتوسط للحلقة يساوى ٠,١٥ متر

(٢١٣) صمـام أمن قطره = ٠,٠٥ متر محمل بثمـان أقراص من الحديد الزهر قطر كل منها ٠,٣٠ متر وسمكها ٠,٠٣٧٥ متر والمطلوب ايجاد ضغط البخار على السنتيمتر المربع الواحد من الصمام

(٢١٤) قضيب مستدير من الحديد قطره = ٠,٠٣٧٥ متر وقضيب آخر مجوف يساويه فى الثقل والطول قطره الخارج ٠,٠٥ متر فما هو القطر الداخل له

(٢١٥) بدالة طولها ٢٤٠ مترا وعرضها الداخل ٦ أمتار وعمق المـاء فيها ١,٨٠ متر فمـا ثقل المـاء المشتملة هى عليه

(٢١٦) اذا كانت البدالة السابقـة مبطنة جوانبها وقاعها بألواح من الصلب سمكها ٠,٠١٠ متر وارتفاع الصاج فى الأجناب ٢,١٠ متر فمـا ثقل تلك الألواح بصرف النظر عمـا فى طرفى البدالة وعن جميع أجزاء المعـدن التى يغطيها أجزاء أخرى

(٢١٧) اذا أريد انشاء كرة مجوفة من الحديد الزهر قطرها الخـارج ٠,٦٠ متر وسمكها يجعلها تعوم بالضبط فى المـاء أى يكون ثقلها مساويا لثقل كرة من المـاء قطرها ٠,٦٠ متر فمـا سمك المعدن

(٢١٨) سلسلة من حلقات من الحديد المطروق المستدير الذى قطره ٠٫٠٢٥ متر وجانبا كل حلقة منها متوازيان فى طول قدره خمسة سنتيمترات ثم يجتمعان بنصفى حلقتين دائريتين نصف قطرهما الداخلى يساوى ٠٫٠٣٢ متر فما ثقل كل حلقة

(٢١٩) المطلوب ايجاد ثقل عتب من الحديد المطروق على شكل ⊤ اذا كانت سمك الرأس ٠٫٠٢٥ متر وعرضها ٠٫١٢٥ متر وارتفاع الروح ٠٫١٢٥ متر وسمكه يختلف من ٠٫٠٢٥ متر عند الرأس الى ١٩ ملليمترا عند النهاية الأخرى وطول العتب يساوى ٣ أمتار

(٢٢٠) اذا كان القطر المتوسط لدائر طيارة آلة بخارية يساوى ١٫٨٠ متر وعرضه ٠٫٣٠ متر وسمكه ٠٫٠٤٤ متر فما ثقل ذلك الدائر اذا كان مصنوعا من الحديد الزهر

(٢٢١) اذا فرض فى المسألة السابقة أن الأذرعة مستطيلية وقطاعها ٠٫٠٧٥ × ٠٫٠٣٧٥ متر وعددها ستة وأن قطر الركبة ٠٫٢٢٥ متر وأن قطر محور الحركة ٠٫١٠ متر فالمطلوب حساب الثقل الكلى للطيارة

تم الكتاب بعون الله

(المطبعة الاميرية ٣٨٨٣ ض ٣٨٨٥ س ١٩٢٤/١١٥٠)

